MAT2410 Calcul des formes différentielles

Olivier Collin

Introduction

Ce texte est une première ébauche de notes pour le cours MAT2410 *Calcul des formes différentielles*. Introduit dans le programme du Baccalauréat en mathématiques de l'UQAM et normalement suivi par les étudiantes et étudiants finissant leur deuxième année, son but premier est de comprendre l'équation suivante

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \ .$$

Simple en apparence, facile à écrire, elle nécessite néanmoins un exploration des domaines du calcul différentiel et intégral, de l'algèbre multi-linéaire et même de la topologie des variétés pour en comprendre la preuve et même le sens. Ce sens deviendra clair au fur et à mesure du cours : "M" est une *variété à bord* de dimension k dans $\mathbb{R}^N$ et "∂M" en est son *bord* ; "$\int$" représente l'*intégration* sur les variétés ; "ω" est une *forme différentielle* de degré $k-1$ sur M ; "d" est l'opérateur de *dérivation extérieure* sur les formes différentielles.
Il est normal que vous ne compreniez essentiellement rien de ce qui précède avant de commencer ce cours et j'espère qu'à la fin de la session vous reviendrez à cette formule, appelée *Théorème de Stokes généralisé*, et qu'elle vous paraitra moins mystérieuse voire parfaitement limpide.
Pendant plus d'un siècle on enseignait au niveau du premier cycle universitaire ce qu'on appelle le *calcul vectoriel* et notamment on développait toute une gymnastique mathématique autour de la notion ad hoc d'*opérateur vectoriel* et on explorait de façon disparate ce que l'on appelle les *théorèmes intégraux* du calcul vectoriel. Il y avait ainsi la formule de Green, celle de Stokes, de Gauss-Ostrogradsky, et ainsi de suite. L'introduction de la notion de forme différentielle - une notion tout de même centenaire maintenant ! - permet de traiter de manière unifiée toutes ces constructions et résultats.

Ces notes ne représentent qu'un résumé de ce qui aura été vu en classe. J'encourage les étudiants à assister au cours, à poser des questions, à réfléchir, en sachant que l'essentiel des preuves se retrouve dans ces notes de cours. Les plus motivés voudront retravailler par eux-même tant la structure que le détail des preuves. Dans un monde idéal, on devrait se souvenir d'assez d'idées clés pour reconstruire chaque résultat mathématique compris précédemment.

Chapitre 1

Notions de base et introduction aux formes extérieures

1. Courbes dans $\mathbb{R}^n$

Dans ce cours nous étudierons beaucoup certains sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ appelés *courbes* et *surfaces* et nous utiliserons les outils du calcul différentiel et intégral pour mieux les comprendre. On rappelle que, formellement, une *courbe dans* $\mathbb{R}^n$ est une application

$$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n,$$

où $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est un sous-intervalle sur lequel une variable, disons $t \in [a,b]$, permet de paramétrer la courbe. En pratique on a souvent tendance à confondre la courbe - qui est une application $\gamma(t)$ - avec son image $\gamma([a,b])$. Ceci est une erreur parce qu'il y a de nombreuses courbes qui ont la même image mais qui sont différentes en tant qu'applications. Par exemple

(1) $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ $(0 \leq t < 2\pi)$

(2) $t \mapsto (\cos 2t, \sin 2t)$ $(0 \leq t < \pi)$

(3) $t \mapsto (\cos 2t, \sin 2t)$ $(0 \leq t < 2\pi)$

ont toutes la même image dans $\mathbb{R}^2$, le cercle unité, mais en tant qu'application elles sont toutes distinctes. Pouvez-vous donner une interprétation dynamique de la différence entre ces trois courbes ?

On dit qu'une courbe $\gamma(t)$ est *différentiable* si la fonction est dérivable en tout point de son domaine : pour tout $t_0 \in [a,b]$, la quantité

$$\lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}$$

existe. On note cette limite $\gamma'(t_0)$ tout en remarquant que c'est, par définition, un vecteur de $\mathbb{R}^n$, que nous appellerons *vecteur tangent à* γ en $\gamma(t_0)$. En physique on appelle ceci le vecteur vitesse, alors que la norme $||\gamma'(t_0)||$ est appelée la vitesse de la courbe en $\gamma(t_0)$. Pour nos fins il sera utile d'imposer une condition supplémentaire : on dit que $\gamma(t)$ est *régulière* si on a $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a,b]$. Une courbe régulière possède donc un *champ* *de vecteurs tangent* partout non-nul le long de $\gamma(t)$.

Exemple. (Courbe donnée par un graphe) Etant donné $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, considérons la courbe $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\alpha(t) = (t, g(t))$. On a alors $\alpha'(t) = (1, g'(t))$ qui est partout non-nul et donc il s'agit d'une courbe régulière.

Notons qu'une courbe $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est en fait complètement déterminée par n fonctions réelles puisqu'elle peut s'écrire comme :

$$\gamma(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots,\ f_n(t))$$

et dire que la courbe est régulière équivaut à demander que les dérivées $f_1', f_2',\ \ldots,\ f_n'$ ne s'annulent pas toutes en un même point $t_0 \in [a,b]$.

On appelle *champ de vecteurs tangents unitaire* associé à une courbe régulière $\gamma(t)$ le champ

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}.$$

2. Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$

Pour le calcul différentiel sur des objets plus compliqués que les courbes, par exemples les surfaces dans $\mathbb{R}^3$, on doit rappeler certaines notions sur la dérivabilité d'applications plus générales. Commençons par le cas de *fonctions* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. De telles fonctions à n variables possièdent n *dérivées partielles* en chaque $p \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p + h(0,0,\ldots,1,0,\ldots,0) - f(p)}{h} \qquad (1 \le k \le n)$$

lorsque ces limites existent. Notons que chacune des dérivées partielles peut être interprétée comme la dérivée en $h = 0$ de la composition

$$h \mapsto p + h(0,0,\ldots,1,0,\ldots,0) \mapsto f(p + h(0,0,\ldots,1,0,\ldots,0))$$

qui représente la restriction de la fonction f à la courbe

$$h \mapsto p + h(0,0,\ldots,1,0,\ldots,0),$$

où seule une coordonnée (la $k^{\text{ième}}$) varie.

L'existence des dérivées partielles ne suffira pas en général pour les objectifs de ce cours. Il faudra au moins que la fonction soit *dérivable*. On dit que $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dérivable en p_0 s'il existe une application linéaire $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{p\to p_0} \frac{|f(p)-f(p_0)-L(p-p_0)|}{||p-p_0||} = 0. \tag{1}$$

Il est important de réfléchir à cette définition et la réponse aux questions suivantes est un bon début. (1) En quoi cette définition généralise-t-elle la notion usuelle de fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en un point ? (2) Lorsque L existe pouvez-vous montrer qu'elle est unique ? (3) Et pouvez-vous alors en donner une expression en termes des dérivées partielles de f ? (4) Donnez un exemple d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui possède des dérivées partielles en $(0,0)$ mais qui n'est pas dérivable en $(0,0)$.

On généralise ce qui précède au cas d'applications $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: on dit que F est dérivable en $p_0 \in \mathbb{R}^n$ s'il existe une application linéaire $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que

$$\lim_{p\to p_0} \frac{||F(p)-F(p_0)-L(p-p_0)||}{||p-p_0||} = 0. \tag{2}$$

Notez bien que cette limite est dans $\mathbb{R}$ et que deux normes sont utilisées de manière implicite dans la définition.

Comme ce fut le cas pour les fonctions, lorsque la dérivée de F en p_0 existe, elle est unique (exercice). On dénotera l'application L par la notation plus suggestive $dF(p_0)$ et on l'appelle la *dérivée de F au point* p_0. Il est essentiel pour la suite de se souvenir que c'est une application *linéaire* $dF(p_0)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Dans le cas où on exprime l'application $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ comme $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, où chaque $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(1 \le k \le m)$ est une des fonctions de coordonnées de F, on a alors par unicité de la dérivée l'expression matricielle suivante :

$$dF(p_0) = \begin{pmatrix} df_1(p_0) \\ df_2(p_0) \\ \vdots \\ df_m(p_0) \end{pmatrix}.$$

Un des résultats les plus importants du calcul différentiel dans les espaces euclidiens est le

Théorème 1. **(Règle de dérivation en chaîne)** *Soient $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $G\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ dérivables en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $F(x_0)$ respectivement. Alors $G \circ F$ est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et sa dérivée est donnée par*

$$d(G \circ F)(x_0) = dG(F(x_0)) \circ dF(x_0).$$

La preuve de ce résultat n'est pas nécessaire pour ce cours et sera vue lors du cours *Analyse III*. Cette formule générale peut être illustrée par de nombreux cas particuliers :

Exemple. Soit $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une courbe dérivable donnée par $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ et $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si on définit $h = f \circ \gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors on a

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

En effet par la règle de chaîne générale, on a $dh = df \circ d\gamma$ où $df\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

alors que $d\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ est donnée par

$$d\gamma(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}.$$

On a donc bien que

$$dh = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}.$$

Exemple. Soient $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$. Alors pour $h = f \circ G$ on a

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}$$

En effet on a, par la règle de chaîne, que $dh = df \circ dG$ et alors au niveau matriciel on a bien

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Comme dans le cas des fonctions, nous avons la notion dérivée partielle pour $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ donnée par

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(p) = \lim_{h\to 0} \frac{F(p + he_k) - F(p)}{h} \in \mathbb{R}^m \ (1 \leq k \leq n).$$

On peut alors montrer (voir *Analyse III*) le résultat suivant

Théorème 2. *Une application $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est continûment dérivable si et seulement si les applications $\frac{\partial F}{\partial x_k}$ existe et sont continûe pour* $(1 \leq k \leq n)$.

C'est-à-dire que dans la classe des applications continûment dérivables - également appelées applications de classe C^1 - on peut réduire la vérification à une condition sur les dérivées partielles.

On peut par ailleurs généraliser la notion de dérivée partielle de la façon suivante : soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ une direction donnée ($||\mathbf{v}|| = 1$) et posons

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}}(p) = \lim_{h\to 0} \frac{F(p + h\mathbf{v}) - F(p)}{h} \in \mathbb{R}^m$$

que nous appelons *dérivée directionnelle* de F dans la direction $\mathbf{v}$. Une autre façon de dénoter la même expression est d'écrire

$$\frac{d}{dt} F(p + t\mathbf{v})\Big|_{t=0}$$

qui illustre bien le fait que la notion de dérivée directionnelle est en fait la dérivée d'une application ne dépendant que d'une seule variable. Lorsque l'on se spécialise au cas des fonctions $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la dérivée directionnelle admet une interprétation en termes de la notion de *gradient* de la fonction.
On rappelle que si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, le champ de vecteurs gradient $\nabla f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est donné par

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), \dots\ , \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right).$$

PROPOSITION 2.1. *Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en p et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ une direction. Alors on a*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(p) = df(p)(\mathbf{v}) = \nabla f(p) \cdot \mathbf{v}.$$

DMONSTRATION. Comme f est dérivable en p on sait que

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f(p+t\mathbf{v}) - f(p) - df(p)(t\mathbf{v})|}{||t\mathbf{v}||} = 0.$$

En utilisant la linéarité de $df(p)$ il s'en suit que l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}(p)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+t\mathbf{v}) - f(p)}{t} = df(p)(\mathbf{v}).$$

Par ailleurs comme on a la représentation matricielle

$$df(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix},$$

on a pour $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ que

$$df(p)(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\ v_i = \nabla f(p) \cdot \mathbf{v}.$$

□

On peut interpréter ce résultat de manière géométrique comme suit : la quantité $\nabla f(p)$ (respectivement $-\nabla f(p)$) donne la direction de $\mathbb{R}^n$ au point p le long de laquelle la fonction f croît (respectivement décroît) le plus rapidement près de p. En effet le produit scalaire $< \nabla f(p), \mathbf{v} >$ est *maximal* lorsque $\mathbf{v} = \nabla f(p)/||\nabla f(p)$ et *minimal* dans le cas où $\mathbf{v} = -\nabla f(p)/||\nabla f(p)||$. Une interprétation physique de ceci est obtenue lorsque l'on cherche à déterminer, étant donné des points de départ et d'arrivée connus, quelle est l'ascension la plus efficace sur une montagne. Si on dénote par $h(x,y)$ la fonction hauteur décrivant la surface de la montagne, la courbe cherchée $\gamma(t)$ aura la propriété que $\gamma'(t) = \nabla h(\gamma(t))$. On peut également montrer que cette courbe $\gamma(t)$ possède un vecteur vitesse $\gamma'(t)$ perpendiculaire aux courbes de niveau $h(x,y) = K$ décrivant la montagne.

Un autre résultat fondamental de l'analyse mathématique qui sera utile pour certaines notions géométriques étudiées dans ce cours est le *Théorème de l'application inverse*. Faisons l'observation préliminaire suivante : lorsque $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une application dérivable qui est inversible et que la fonction inverse $F^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est également dérivable, alors en appliquant la règle de chaîne appliquée à $F \circ F^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ donne $dF(x_0) \circ dF^{-1}(y_0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$, où $F(x_0) = y_0$, ce qui permet de conclure que

"La dérivée de l'inverse de F est égale à l'inverse de la dérivée de F."

Le Théorème de l'application inverse est une réciproque partielle de cette observation. On dit que $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un *difféomorphisme de classe C^1* si F et F^{-1} sont de classe C^1 (i.e. continûment dérivables).

THÉORÈME 3. **(Théorème de l'application inverse)** *Soit $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que l'application linéaire $dF(x_0)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ soit inversible. Alors il existe des voisinages $\mathcal{U}_{x_0}$ et $\mathcal{U}_{F(x_0)}$, autour de x_0 et $F(x_0)$ respectivement, tels que $F|_{\mathcal{U}_{x_0}}\colon \mathcal{U}_{x_0} \to \mathcal{U}_{F(x_0)}$ soit un difféomorphisme de classe C^1.*

A priori ce résultat est remarquable parce qu'il permet de remplacer un problème difficile (savoir inverser F dans un voisinage de x_0 et $F(x_0)$) par un problème simple d'algèbre linéaire (savoir si l'application linéaire $dF(x_0)$ est inversible). Il peut paraître surprenant que l'on puisse passer de considérations linéaires en un unique point x_0 à une conclusion qui n'est plus de nature ponctuelle. Réfléchir à cette question est un bon exercice.

Notons une conséquence importante du théorème de l'application inverse :

THÉORÈME 4. **(Théorème des fonctions implicites)** *Soit $F\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ une application de classe C^1 telle que l'on ait $F(a_0, b_0) = 0$ pour $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^n$. On dénote également $F = (f_1, f_2, \ldots, f_k)$ et on met sur $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ des coordonnées $(s_1, s_2, \ldots, s_k, r_1, r_2, \ldots, r_{n-k})$. Alors si la matrice jacobienne*

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial s_j}(a_0, b_0)\right)_{1 \le i,j \le k}$$

est inversible, il existe un ouvert $\mathcal{V}_0 \times \mathcal{W}_0 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ autour de (a_0, b_0) ainsi qu'une application $G\colon \mathcal{W}_0 \to \mathcal{V}_0$ de classe C^1 telle que pour chaque $(p, q) \in \mathcal{V}_0 \times \mathcal{W}_0$ on ait

$$F(p, q) = 0 \iff p = G(q).$$

3. Dérivées partielles itérées et applications de classe C^k

Etant donné $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on a construit les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \in \mathbb{R}$ $(1 \le i \le n)$. Lorsque cette construction peut être faite en chaque point $p \in \mathbb{R}^n$, pour chaque $1 \le i \le n$, on obtient une *fonction*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

appelée fonction dérivée partielle de f par rapport à la variable x_i. On peut alors répéter la procédure et construire le réel

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(p)$$

et si ceci existe pour tout $p \in \mathbb{R}^n$, on a alors construit la fonction que l'on dénotera

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

appelée *dérivée partielle seconde par rapport aux variables x_i puis x_j*. En renversant le rôle de i et j, on peut également construire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Attention ! En général on n'a pas l'égalité de fonctions

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},$$

comme on peut le voir avec l'exemple suivant. La fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

satisfait

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1.$$

Par contre, en restreignant un peu la classe de fonctions avec lesquelles on travaille, on obtient le résultat suivant qui se révèlera plus tard fondamental pour les objets considérés dans ce cours.

Théorème 5. **(Egalité des dérivées secondes mixtes)** *Si les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont continues en un point $p \in \mathbb{R}^n$, alors on a*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p).$$

Dmonstration. Nous donnons les idées principales derrière la preuve. Elle se fonde sur une résultat classique d'analyse réelle, le *Théorème des accroissements finis* : Pour $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, on a

$$\frac{\varphi(z_0+\ell)-\varphi(z_0)}{\ell} = \frac{d\varphi}{dz}(z)$$

pour un certain $z \in (z_0, z_0+\ell)$.

Pour simplifier la notation, on considère une fonction $f(x,y)$ ne dépendant que de deux variables, puisque les autres n'interviennent pas dans l'énoncé. On définit alors la fonction auxiliaire

$$F(h,k) = \frac{1}{hk}\Big[f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0+k) - f(x_0+h,y_0) + f(x_0,y_0)\Big].$$

Cette fonction permet d'exprimer a la fois $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$ comme limite de $F(h,k)$ quand $h,k \to 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(x_0,y_0) \\
&= \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Big] \\
&= \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\Big[\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)}{h} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}\Big] \\
&= \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} F(h,k),
\end{aligned}$$

alors qu'un calcul similaire donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} F(h,k).$$

On peut alors écrire (les justifications suivent ci-dessous) :

$$\begin{aligned}
F(h,k) &\overset{\text{(I)}}{=} \frac{1}{h}\Big[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,y_0+\theta_1 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\theta_1 k)\Big] \\
&\overset{\text{(II)}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_1 k)
\end{aligned}$$

ainsi que

$$
\begin{aligned}
F(h,k) &\overset{\text{(III)}}{=} \frac{1}{k}\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_3 h, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_3 h, y_0)\Big] \\
&\overset{\text{(IV)}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_4 k)
\end{aligned}
$$

pour certains $0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 < 1$ dépendant de x_0, y_0, h et k.

Chacune des quatre égalités ci-dessus provient d'une application du théorème des accroissements finis en une variable. Par exemple pour (I) si on pose $G(y) = f(x_0+h, y) - f(x_0, y)$, alors

$$\frac{G(y_0+k) - G(y_0)}{k} = \frac{dG}{dy}(y_0+\theta_1 k) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\theta_1 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\theta_1 k),$$

pour un certain $0 < \theta_1 < 1$, si bien que l'on a effectivement

$$F(h,k) = \frac{1}{h}\Big[\frac{G(y_0+k) - G(y_0)}{k}\Big] = \frac{1}{h}\Big[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\theta_1 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\theta_1 k)\Big].$$

De même (II) est obtenue par les accroissements finis en considérant $H(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0+\theta_1 k)$ et

$$F(h,k) = \frac{1}{h}\Big[H(x_0+h) - H(x_0)\Big].$$

L'équation (III) est quand à elle obtenue de façon analogue à (I) à partir des fonctions $A(x) = f(x, y_0+k) - f(x, y_0)$ et

$$F(h,k) = \frac{1}{k}\Big[\frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h}\Big].$$

Finalement, on établit (IV) comme on a procédé pour (II) à partir de $B(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_3 h, y)$ ainsi que

$$F(h,k) = \frac{1}{k}\Big[B(y_0+k) - B(y_0)\Big].$$

Ce qui précède donne l'égalité

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_1 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_4 k).$$

On doit se rappeler ici que θ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, dépend sur h, k, mais que on a aussi $0 < \theta_i < 1$. En prenant la limite $(h,k) \to (0,0)$ de chaque côté de cette dernière équation et en utilisant de façon essentielle la continuité des deux dérivées partielles secondes en (x_0, y_0), on a bien le résultat annoncé. $\square$

Pour les fins de ce cours, nous allons requérir minimalement que les fonctions et applications soient toutes de classe C^2, ce qui revient à demander que les dérivées partielles secondes existent et soient continues. Le théorème ci-dessus nous dit alors que l'ordre de dérivation partielle n'importe pas. On peut également demander que les fonctions et applications soient de classe C^k, c'est-à-dire que les dérivées partielles itérées jusqu'à l'ordre k existent et soient continues. Ou même encore que les fonctions et applications soient infiniment dérivables ou de classe C^∞. Nous ne traiterons pas des aspects techniques exhibant les différences entre ces diverses classes de fonctions... Nous supposerons que les fonctions considérées sont "suffisamment dérivables" pour le problème considéré.

4. Systèmes de coordonnées

Contrairement à ce qui se passe en géométrie élémentaire, où les coordonnées cartésiennes suffisent amplement, certains des problèmes envisagés plus tard dans ce cours requièrent l'utilisation de coordonnées mieux adaptées aux objets considérés. Nous passons brièvement en revue quelques systèmes de coordonnées souvent utilisés en faisant quelques remarques au passage.

Dans $\mathbb{R}^2$ on se satisfait le plus souvent des coordonnées cartésiennes et des coordonnées polaires. Etant donné un point $P = (x, y)$ en coordonnées cartésiennes, pourvu qu'il soit différent de l'origine $(0, 0)$, on peut le décrire de manière unique en coordonnées polaires par son *rayon* $r \in (0, +\infty)$ et son *angle* $\theta \in [0, 2\pi)$ On connait bien le lien explicite entre ces deux systèmes de coordonnées :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{ainsi que} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) \end{cases}$$

En fait, de façon plus précise, la première expression (sur la gauche) peut être interprétée comme $F\colon (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 - \{\mathbb{R}^+ \times \{0\}\}$ donnée par

$$F(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Un calcul immédiat de dérivées partielles par rapport à r et θ donne la dérivée

$$dF(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

On remarque alors que $\det dF(r,\theta) = r$ et donc $dF(r,\theta)$ est toujours inversible sur le domaine de définition de F. Par le Théorème de l'application inverse, one sait automatiquement que F est difféomorphisme local. La seconde expression vue précédemment (celle sur la droite) nous dit qu'en fait il s'agit d'un difféomorphisme global. Si on pose $G = F^{-1}$, on a alors

$$dG = (dF)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Dans $\mathbb{R}^3$ il y a plusieurs systèmes de coordonnées rencontrés fréquemment : les coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques. Ces deux dernières permettent d'exprimer un point quelconque $P = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ autre que l'origine respectivement comme

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z \text{ variable libre} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

Le lecteur ou la lectrice pourra faire un calcul analogue à celui fait dans $\mathbb{R}^2$ pour obtenir les domaines de définition et d'arrivée ainsi que la dérivée d'applications décrivant ces systèmes de coordonnées.

Selon le système employé, un domaine possède une expression plus ou moins simple, comme l'illustrent les deux exemples suivants.

Exemples (cylindre et sphère) : Le cylindre dans $\mathbb{R}^3$ ayant pour base le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$ a pour équations :
(1) cartésiennes : $x^2 + y^2 = 1$;
(2) cylindriques : $r = 1$;
(3) sphériques : $\rho\sin\phi = 1$.

La sphère unité dans $\mathbb{R}^3$ a pour équations :
(1) cartésiennes : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
(2) cylindriques : $r^2 + z^2 = 1$;
(3) sphériques : $\rho = 1$.

5. Paramétrisations pour les courbes et surfaces

On se rappelle qu'une courbe a été définie comme une application $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ satisfaisant certaines hypothèses de régularité. En géométrie on est souvent amené à partir d'un objet donné que l'on veut paramétrer pour mieux pouvoir l'étudier. Par exemple nous avons vu plusieurs paramétrisations possibles pour le cercle unité $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$. Ceci nous amène à définir la notion de reparamétrisation de courbes. Pour simplifier la discussion nous allons nous restreindre au cas $n = 3$.

On appelle *fonction de reparamétrisation* pour une courbe $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ une fonction bijective $g\colon [c,d] \to [a,b]$ avec $g'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [c,d]$, telle que g et g^{-1} soient de classe C^k $(k \geq 1)$. A partir de α et g on construit une nouvelle courbe

$$\beta = \alpha \circ g\colon [c,d] \to \mathbb{R}^3$$

que l'on appelle *reparamétrisation de la courbe* α. Quelques remarques s'imposent :
(1) L'image de β est exactement celle de α, mais les deux courbes sont différentes en tant qu'applications vers $\mathbb{R}^3$.
(2) Si α est une courbe régulière, la règle de chaîne donne immédiatement que $\beta = \alpha \circ g$ est également régulière.
(3) La reparamétrisation d'une courbe change en général la vitesse de parcours le long de la courbe : si on pose $t = g(s)$ alors on a $\beta(s) = \alpha(t)$ mais à ce point de $\mathbb{R}^3$, on a en général $||\beta'(s)|| \neq ||\alpha'(t)||$. (Faîtes quelques exemples avec des reparamétrisations du cercle.)

Développons un peu (3). Par la règle de chaîne appliquée à $\beta(s) = \alpha(t)$ où $t = g(s)$ on a

$$\beta'(s) = \frac{d\beta}{ds}(s) = \frac{d(\alpha \circ g)}{ds}(s) = \frac{d\alpha}{dt}(g(s))\frac{dg}{ds}(s) = \alpha'(t)g'(s).$$

On a donc la relation suivante entre les vitesses : $||\beta'(s)|| = |g'(s)|||\alpha'(t)||$. C'est-à-dire que pour avoir les mêmes vitesses de parcours pour β et α en un point donné, il faut satisfaire la condition

$$\left|g'(s)\right| = 1 \qquad (\forall s \in [c,d])$$

ce qui revient à dire $|g'(s)| \equiv 1$ ou $|g'(s)| \equiv -1$ et donc

$$g(s) = s + \text{Constante} \qquad \text{ou} \qquad g(s) = -s + \text{Constante}.$$

Ceci signifie, de manière plus géométrique, que g est soit une translation dans $\mathbb{R}$ restreinte à un intervalle soit $-\operatorname{Id}_{\mathbb{R}}$ suivi d'une translation restreintes à un intervalle.

Un autre élément intéressant est de comparer les champs de vecteurs tangents unitaires respectifs $\mathbf{T}$ et $\mathbf{S}$ pour les courbes α et $\beta = \alpha \circ g$. Si on pose $t_0 = g(s_0)$ alors on a

$$\mathbf{S}(s_0) = \pm \mathbf{T}(t_0).$$

En effet, on a par définition de champ tangent unitaire

$$\mathbf{S}(s_0) = \frac{\beta'(s_0)}{||\beta'(s_0)||} = \frac{\alpha'(t_0)g'(s_0)}{||\alpha'(t_0)|||g'(s_0)|} = \mathbf{T}(t_0)\frac{g'(s_0)}{|g'(s_0)|} = \pm \mathbf{T}(t_0).$$

En fait, nous avons plus : le signe qui semble dépendre de s_0 ci-dessus ne peut pas changer lorsque l'on remplace s_0 par un $s \in [c,d]$ quelconque et $t = g(s)$. En effet, comme $g\colon [c,d] \to [a,b]$ est fonction de reparamétrisation on doit avoir $g'(s) > 0$ partout sur $[c,d]$ ou bien $g'(s) < 0$ partour sur $[c,d]$ (pourquoi ?). L'équation ci-dessus nous donne bien $\mathbf{S}(s) = +\mathbf{T}(t)$ pour tous $s \in [c,d]$ et $t \in [a,b]$ ou alors $\mathbf{S}(s) = -\mathbf{T}(t)$ pour tous $s \in [c,d]$ et $t \in [a,b]$. Ceci peut être exprimé de la manière suivante : La notion de champ de vecteurs tangent unitaire le long d'une courbe est *intrinsèque*, au sens où elle ne dépend pas de la paramétrisation utilisée sauf pour ce qui est du sens de parcours le long de la courbe.

Nous ne savons pas encore si toute courbe régulière possède une paramétrisation dont le champ de vecteurs tangents est unitaire. Pour établir ceci nous faisons un détour par une autre notion importante : la longueur d'arc le long d'une courbe. Etant donné une courbe $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$, on appelle *longueur d'arc de la courbe* α le réel suivant lorsque celui-ci existe :

$$\int_a^b ||\alpha'(t)||dt.$$

La proposition suivante montre qu'il s'agit d'une propriété intrinsèque de la courbe :

Proposition 5.1. *Soit $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ une courbe régulière et $\beta = \alpha \circ g$ une reparamétrisation à l'aide de $g\colon [c,d] \to [a,b]$ fonction de reparamétrisation. Alors α et β ont la même longueur d'arc :*

$$\int_c^d ||\beta'(s)||ds = \int_a^b ||\alpha'(t)||dt.$$

DMONSTRATION. On peut écrire

$$\int_c^d ||\beta'(s)||ds = \int_c^d \Big|\Big|\frac{d\beta}{ds}\Big|\Big|ds = \int_c^d \Big|\Big|\frac{d\alpha}{dt}\frac{dg}{ds}\Big|\Big|ds = \int_c^d \Big|\Big|\frac{d\alpha}{dt}\Big|\Big|\Big|\frac{dg}{ds}\Big|ds.$$

Supposons dans un premier temps que $g'(s) > 0$ sur $[c, d]$, donc g est croissante et on sait que l'on doit avoir $g(c) = a$ et $g(d) = b$. On peut alors appliquer la règle de changement de variable en intégration pour obtenir

$$\int_c^d \Big|\Big|\frac{d\alpha}{dt}\Big|\Big|\Big|\frac{dg}{ds}\Big|ds = \int_a^b \Big|\Big|\frac{d\alpha}{dt}\Big|\Big|dt$$

donnant directement le résultat annoncé. Le cas où $g'(s) < 0$ sur $[c, d]$ est traité de façon similaire. □

Si $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ est une courbe régulière et que $t_0 \in [a, b]$, on pose

$$h(t) = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(\tau)||d\tau$$

si bien que $s = h(t)$ est la longueur d'arc le long de α entre $\alpha(t_0)$ et $\alpha(t)$. C'est une quantité munie d'un signe selon que $t_0 < t$ ou $t_0 > t$. On a alors

THÉORÈME 5.2. *La fonction h est bijective entre $[a, b]$ et un certain intervalle $[c, d]$ et la fonction $g = h^{-1}\colon [c, d] \to [a, b]$ est une fonction de reparamétrisation pour $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$.*

DMONSTRATION. Par le Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, on a $h'(t) = ||\alpha'(t)||$ et cette quantité est strictement positive sur $[a, b]$ puisque la courbe α est régulière. Ceci donne directement que h est fonction strictement croissante et donc bijective entre $[a, b]$ et $[h(a), h(b)] = [c, d]$. Comme la fonction norme $||\ ||\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$, on obtient que h est de classe C^k si α est de classe C^k. Par le Théorème de l'application inverse, la condition $h'(t) \neq 0$ partout sur $[a, b]$ nous donne que h possède une fonction inverse $g = h^{-1}$ qui sera également C^k. Donc on a bien que g est fonction de reparamétrisation. □

Nous pouvons alors démontrer que l'on peut toujours reparamétrer une courbe afin que son champ de vecteurs tangents soit unitaire :

THÉORÈME 5.3. *Soit* $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une courbe régulière avec* $s = h(t)$ *fonction longueur d'arc le long de* α*. Alors* $\beta(s) = \alpha(h^{-1}(s))$ *est une reparamétrisation de* α *ayant un champ de vecteurs tangents unitaire.*

DMONSTRATION. On sait par le résultat précédent que β est reparamétrisation de α. La Proposition 5.1 dit, en outre, que α et β ont même longueur d'arc et donc on doit avoir

$$\int_0^s ||\beta'(\tau)||d\tau = s.$$

En dérivant de chaque côté de l'équation (par rapport à s), on obtient bien la condition requise $||\beta'(s)|| = 1$ pour avoir un champ de vecteurs tangent unitaire le long de β. $\square$

6. Vecteurs tangents dans $\mathbb{R}^3$ et l'espace $T_p(\mathbb{R}^3)$

Cette section semblera très formelle et assez peu intuitive mais elle est d'une importance immense pour la suite du cours et met à jour une nouvelle façon d'aborder la notion de vecteur tangent dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

DÉFINITION 6.1. *Soit* $p \in \mathbb{R}^3$ *un point. On dit que* X_p *est un vecteur tangent de* $\mathbb{R}^3$ *en* p *s'il existe une courbe lisse* $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ *telle que* $\gamma(0) = p$ *et* $\gamma'(0) = X_p$*.*

Bien sûr il y a de nombreux choix possibles pour trouver une telle courbe γ, mais pour nous toutes ces possibilités seront considérées comme équivalentes.

DÉFINITION 6.2. *L'ensemble de tous les vecteurs tangents à* $\mathbb{R}^3$ *en* p *est appelé espace tangent de* $\mathbb{R}^3$ *en* p *et il est noté* $T_p\mathbb{R}^3$*.*

Etant donné un point $p \in \mathbb{R}^3$, les courbes

$$\begin{aligned} x(t) &= p + t(1,0,0) \\ y(t) &= p + t(0,1,0) \\ z(t) &= p + t(0,0,1) \end{aligned}$$

donnent lieu à trois éléments de $T_p\mathbb{R}^3$ que nous noterons

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \text{ et } \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p$$

respectivement. Il est facile de voir que la correspondance

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p \leftrightarrow (1,0,0),\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \leftrightarrow (0,1,0),\ \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \leftrightarrow (0,0,1)$$

donne lieu à un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $T_p\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3$ mais, tel que le montrera la suite du cours, nous aurons tout intérêt à ne pas confondre ces deux espaces.

Une autre notion utile est celle du *fibré tangent de* $\mathbb{R}^3$ qui est tout simplement l'ensemble

$$T\mathbb{R}^3 = \{(p, X_p) \mid p \in \mathbb{R}^3\ ,\ X_p \in T_p\mathbb{R}^3\}.$$

Le fibré tangent $T\mathbb{R}^3$ contient à lui seul tous les espaces tangents à $\mathbb{R}^3$ en chaque point de $\mathbb{R}^3$. En utilisant l'isomorphisme $T_p\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$ on peut identifier $T\mathbb{R}^3$ à $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Notons en outre qu'il y a une projection naturelle $\pi\colon T\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $\pi((p, X_p)) = p$ et que celle-ci nous permet de définir un *champ de vecteurs tangents sur* $\mathbb{R}^3$ comme étant une application $X\colon \mathbb{R}^3 \to T\mathbb{R}^3$ satisfaisant la condition $\pi \circ X = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
On a les champs de vecteurs remarquables suivants :

$$\frac{\partial}{\partial x}\colon p \mapsto (p, \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p),\ \frac{\partial}{\partial y}\colon p \mapsto (p, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p),\ \frac{\partial}{\partial z}\colon p \mapsto (p, \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p)$$

qui vont jouer un rôle essentiel par la suite, en vertu du lemme suivant :

Lemme 6.3. *Soit $X\colon \mathbb{R}^3 \to T\mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs tangents quelconque. Alors il existe trois fonctions $a_i\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq 3)$ uniquement déterminées telles que*

$$X = a_1(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x} + a_2(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y} + a_3(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z}\ .$$

Dmonstration. On a la composition

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{X} & T\mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\qquad\simeq\qquad} & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \\ & & & & \\ p & \longmapsto & (p, X_p) & \longmapsto & (p, (a_1(p), a_2(p), a_3(p))). \end{array}$$

Mais alors on a en tout $p \in \mathbb{R}^3$

$$(a_1(p), a_2(p), a_3(p)) = a_1(p)(1, 0, 0) + a_2(p)(0, 1, 0) + a_3(p)(0, 0, 1)$$

si et seulement si

$$(p, X_p) = (p, a_1(p)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + a_2(p)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + a_3(p)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p)$$

si et seulement si

$$X = a_1(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x} + a_2(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y} + a_3(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z}.$$

□

La clé pour comprendre ce nouveau point-de-vue sur les vecteurs tangents et les champs de vecteurs tangents réside dans la notion de *dérivée directionnelle*.

DÉFINITION 6.4. *Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, $p \in \mathbb{R}^3$ un point et $X_p \in T_p\mathbb{R}^3$ un vecteur tangent. La dérivée directionnelle en p de f dans la direction X_p est le réel*

$$X_p(f) = \frac{d}{dt} f(p + tX_p)\Big|_{t=0} .$$

Pour que cette définition ait un sens, il faut bien sûr que le terme X_p apparaissant dans le membre de droite soit identifié à un élément de $\mathbb{R}^3$ sous l'isomorphisme $T_p\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$. Après avoir choisi la base $\{(\frac{\partial}{\partial x})_p, (\frac{\partial}{\partial y})_p, (\frac{\partial}{\partial z})_p\}$ de $T_p\mathbb{R}^3$, on a une expression très simple pour $X_p(f)$:

LEMME 6.5. *Etant donné un vecteur tangent $X_p = a_1(\frac{\partial}{\partial x})_p + a_2(\frac{\partial}{\partial y})_p + a_3(\frac{\partial}{\partial z})_p$, la dérivée directionnelle de f dans la direction X_p est donnée par*

$$X_p(f) = a_1\frac{\partial f}{\partial x}(p) + a_2\frac{\partial f}{\partial y}(p) + a_3\frac{\partial f}{\partial z}(p).$$

DMONSTRATION. En un point $p = (p_1, p_2, p_3)$ de $\mathbb{R}^3$ le vecteur tangent $p + tX_p$ peut être identifié à $(p_1+ta_1, p_2+ta_2, p_3+ta_3)$ et donc $f(p+tX_p) = f(p_1+ta_1, p_2+ta_2, p_3+ta_3)$. Par ailleurs, comme

$$\frac{d}{dt}(p + ta_i)\Big|_{t=0} = a_i \ (1 \le i \le 3)$$

la règle de dérivation en chaîne donne bien

$$X_p(f) = \frac{d}{dt} f(p + tX_p)\Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x}(p)a_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p)a_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(p)a_3.$$

□

Par ce qui précède on peut donc interpréter les vecteurs tangents à $\mathbb{R}^3$ en p comme des opérateurs sur les fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} X_p\colon C^\infty(\mathbb{R}^3) &\to \mathbb{R} \\ f &\longmapsto X_p(f) \end{aligned}$$

On peut alors facilement démontrer (exercice !) les propriétés suivantes :
(1) (Linéarité) $X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha X_p(f) + \beta X_p(g)$;
(2) (Leibniz) $X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g)$;

(3) $(\alpha X_p + \beta Y_p)(f) = \alpha X_p(f) + \beta Y_p(f)$.

Comme la notion de dérivée directionnelle permet d'associer à $X_p \in T_p\mathbb{R}^3$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ un réel $X_p(f)$, on ne sera pas surpris par le fait que l'on puisse associer à un champ de vecteurs lisse $X\colon \mathbb{R}^3 \to T\mathbb{R}^3$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ une *fonction*

$$X(f)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

tout simplement définie par $X(f)\colon p \mapsto X_p(f)$, en utilisant la dérivée directionnelle point par point. Le champ de vecteur X peut alors être interprété comme une application

$$X\colon C^\infty(\mathbb{R}^3) \to C^\infty(\mathbb{R}^3).$$

On obtient alors facilement les trois propriétés suivantes :
(1) (Linéarité) $X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g)$;
(2) (Leibniz) $X(fg) = X(f)g + fX(g)$;
(3) $(fX + gY)(h) = fX(h) + gY(h)$.

Remarque : Tout ce que nous avons fait jusqu'à maintenant dans cette section pour le cas $n = 3$ se généralise aisément au cas n quelconque. On a alors l'espace tangent $T_p\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^n$ qui est un espace de dimension n, de base $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, (\frac{\partial}{\partial x_2})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_p\}$, où chaque $X_p \in T_p\mathbb{R}^n$ peut être vu comme $X_p\colon C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ au moyen de la dérivée directionnelle. Ceci permet de voir un champ de vecteurs tangents X sur $\mathbb{R}^n$ comme $X\colon C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Nous allons maintenant analyser l'effet d'une application $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ au niveau des espaces tangents. Etant donné $X_p \in T_p\mathbb{R}^n$ un vecteur tangent à $\mathbb{R}^n$, on considère la courbe dans $\mathbb{R}^m$ $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^m$ donnée par $\gamma(t) = F(p + tX_p)$. On obtient alors un élément de $T_{F(p)}\mathbb{R}^m$ en considérant $\gamma'(0)$, un élément que nous notons $(dF)_p(X_p)$. Ceci permet de définir une application

$$(dF)_p\colon T_p\mathbb{R}^n \to T_{F(p)}\mathbb{R}^m$$

appelée *la différentielle de* $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *en* p.

Proposition 6.6. *Si l'application* $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est donnée par* $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ *alors on a*

$$(dF)_p(X_p) = (X_p(f_1), X_p(f_2), \ldots, X_p(f_m)).$$

Dmonstration. Si on pose

$$\gamma(t) = F(p + tX_p) = (f_1(p + tX_p), f_2(p + tX_p), \dots, f_m(p + tX_p))$$

alors, par construction, $(dF)_p(X_p) = \gamma'(0)$. Mais on se souvient que les dérivées directionnelles sont données par

$$X_p(f_k) = \frac{d}{dt} f_k(p + tX_p)\Big|_{t=0} \quad (1 \leq k \leq m)$$

ce qui donne bien le résultat. □

Cette proposition combinée à la propriété $(\alpha X_p + \beta Y_p)(f) = \alpha X_p(f) + \beta Y_p(f)$ permet de montrer

Proposition 6.7. *La différentielle $(dF)_p \colon T_p\mathbb{R}^n \to T_{F(p)}\mathbb{R}^m$, est une application linéaire.*

Une autre observation importante est que si l'on choisit les bases $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_p\}$ pour $T_p\mathbb{R}^n$ et $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_{F(p)}, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_{F(p)}\}$ pour $T_{F(p)}\mathbb{R}^m$ on peut calculer le représentant matriciel de $(dF)_p$ de la manière suivante. En se souvenant (Lemme 6.5) que l'on a

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p (f_i) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)$$

on obtient

$$(dF)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{F(p)} \quad (1 \leq j \leq n).$$

C'est-à-dire que le représentant matriciel de la différentielle de F en p, $(dF)_p$, est la *matrice jacobienne* de F

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

déjà rencontrée dans un premier cours de calcul différentiel dans l'espace.

La lectrice et le lecteur attentifs auront peut-être remarqué qu'au cours de ce chapître nous avons défini plus tôt, pour une application $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et un point $p \in \mathbb{R}^n$ un premier objet, la *dérivée* de F en p

$$dF(p) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m;$$

et que par la suite nous avons défini un second objet, la *différentielle* de F en p

$$(dF)_p \colon T_p\mathbb{R}^n \to T_{F(p)}\mathbb{R}^m.$$

En fait il s'agit de la même notion ! Essentiellement ceci découle de l'isomorphisme entre $T_p\mathbb{R}^n$ (resp. $T_{F(p)}\mathbb{R}^m$) et $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^m$) et ce sera un exercice formateur que de fournir les détails permettant de justifier l'égalité "$dF(p) = (dF)_p$".

7. Surfaces plongées dans $\mathbb{R}^3$

On dit qu'une application $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est un *plongement lisse* (resp. de classe C^k) si F est lisse (resp. de classe C^k), F est injectif, $F^{-1}\colon F(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ est continue et, en chaque $p \in \mathbb{R}^n$, on a $(dF)_p\colon T_p\mathbb{R}^n \to T_{F(p)}\mathbb{R}^m$ injective. Cette définition se généralise immédiatement à des applications définies seulement sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Par des notions élémentaires d'algèbre linéaire, on sait que la condition $(dF)_p$ injective est équivalente à dire que $\mathrm{Ker}(dF)_p = \{0\}$ ou encore à dire que la matrice jacobienne de F a rang égal à n. Notons de plus que ces conditions équivalentes ne peuvent avoir lieu que si l'on a $n \leq m$ (pourquoi ?). Il y a également un point technique sur lequel nous n'insisterons pas : en fait les conditions de plongement et un raffinement du théorème de l'application inverse permettent de montrer que l'application $F^{-1}\colon F(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ est également lisse (respectivement de classe C^k), pas seulement continue.

Définition 7.1. *On dit que $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est une surface plongée si elle est localement donnée par un plongement. C'est-à-dire qu'autour de chaque $p \in \Sigma$ il existe un plongement $\chi\colon \mathcal{U}_0 \to \mathcal{V}_p$, pour certains ouverts $\mathcal{V}_p \subset \mathbb{R}^3$ autour de p et $\mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^2$ autour de $(0,0)$, avec $\chi(\mathcal{U}_0) = \mathcal{V}_p \cap \Sigma =: \mathcal{U}_p$.*

Il est important de remarquer que c'est une condition purement locale et qu'il y a beaucoup de flexibilité pour le choix des ouverts $\mathcal{U}_p$ et $\mathcal{U}_0$. La façon la plus simple est de prendre $\mathcal{U}_0 = B((0,0),\delta)$ et $\mathcal{U}_p = B(p,\epsilon) \cap \Sigma$ pour certaines valeurs de $\delta > 0$ et $\epsilon > 0$ adéquatement choisies.

Exemple (La sphère S^2) Esquissons une preuve du fait que

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

est une surface plongée. On considère les six ouverts suivants qui recouvrent S^2 :

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_z^{\pm} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, \pm\sqrt{1-x^2-y^2})\} \text{ si } z \neq 0\\
\mathcal{U}_y^{\pm} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, \pm\sqrt{1-x^2-z^2}, z)\} \text{ si } y \neq 0\\
\mathcal{U}_x^{\pm} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\pm\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z)\} \text{ si } x \neq 0
\end{aligned}$$

On définit alors les applications suivantes :

$$\begin{aligned}
\chi_z^{\pm}(x,y) &= (x, y, \pm\sqrt{1-x^2-y^2})\\
\chi_y^{\pm}(x,z) &= (x, \pm\sqrt{1-x^2-z^2}, z)\\
\chi_x^{\pm}(y,z) &= (\pm\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z)
\end{aligned}$$

dont on peut facilement vérifier qu'il s'agit de plongements du disque ouvert de centre $(0,0)$ et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$. Par exemple $\chi_z^+ \colon \mathcal{U}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\} \to \mathcal{U}_z^+$ est un plongement : c'est une application lisse partout sur $\mathcal{U}_0$, dont l'inverse est tout simplement la projection $(x, y, +\sqrt{1-x^2-y^2}) \mapsto (x,y)$ et est donc continue. Finalement sa différentielle est

$$d\chi_z^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{1-x^y-y^2}} \end{pmatrix}$$

ce qui établit directement que $d\chi_z^+$ est injective. Le lecteur, la lectrice pourront traiter les cinq autres cas de manière similaire. Il est à noter que l'on a vraiment besoin des six ouverts considérés : $\mathcal{U}_z^{\pm}$ ne couvrent pas les points de la sphère S^2 où $x^2+y^2 = 1$ et $z = 0$, alors que $\mathcal{U}_y^{\pm}$ ne couvrent pas les points où $x^2+z^2 = 1$ et $y = 0$, si bien que l'on a besoin de $\mathcal{U}_x^{\pm}$.

Exemple (Graphe d'une fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) Etant donné une fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui est lisse on définit son *graphe*

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}.$$

Il s'agit alors d'une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$ puisqu'on peut tout simplement définir le plongement $\chi(x,y) = (x, y, f(x,y))$.

Etant donné une surface régulière Σ, autour de chaque point p, Σ est localement difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$. L'application $\chi\colon \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_p$ permettant ceci est appelée un *système de coordonnées sur* $\mathcal{U}_p$. l'application inverse $\chi^{-1}\colon \mathcal{U}_p \to \mathcal{U}_0$ est appelée une *carte locale* de Σ autour de p. A partir de $\chi(u,v)$ on peut construire les courbes paramétriques suivantes

$$\begin{aligned} u &\mapsto \chi(u, v_0) \text{ (pour } v_0 \text{ fixe)} \\ v &\mapsto \chi(u_0, v) \text{ (pour } u_0 \text{ fixe)} \end{aligned}$$

et lorsque l'on balaie toutes ces courbes, on décrit entièrement Σ dans un voisinage de p. En considérant les dérivées partielles de $\chi(u,v) = (\chi_1(u,v), \chi_2(u,v), \chi_3(u,v))$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial u} &= \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial u}, \frac{\partial \chi_2}{\partial u}, \frac{\partial \chi_3}{\partial u}\right) \\ \frac{\partial \chi}{\partial v} &= \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial v}, \frac{\partial \chi_2}{\partial v}, \frac{\partial \chi_3}{\partial v}\right) \end{aligned}$$

Nous abbrévions la notation par $\partial_u \chi$ et $\partial_v \chi$. Evaluées en (u_0, v_0) ces dérivées partielles s'interpretent géométriquement comme les vecteurs tangents aux courbes paramétriques $\chi(u, v_0)$ et $\chi(u_0, v)$ respectivement. Puisque l'on a $\partial_u \chi(u_0, v_0), \partial_v \chi(u_0, v_0) \in T_p\mathbb{R}^3$, on peut les exprimer comme

$$\begin{aligned} \partial_u \chi(u_0, v_0) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \chi_i}{\partial u}(u_0, v_0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \\ \partial_v \chi(u_0, v_0) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \chi_i}{\partial v}(u_0, v_0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \end{aligned}$$

La condition d'injectivité sur $d\chi$ pour que χ soit un plongement signifie que la jacobienne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial u} & \frac{\partial \chi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial u} & \frac{\partial \chi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial u} & \frac{\partial \chi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

est de rang égal à 2. Cette condition peut s'exprimer en considérant le produit vectoriel dans $T_p\mathbb{R}^3$

$$\partial_u\chi \times \partial_v\chi = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial u} & \frac{\partial \chi_2}{\partial u} & \frac{\partial \chi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial v} & \frac{\partial \chi_2}{\partial v} & \frac{\partial \chi_3}{\partial v} \end{vmatrix}$$

qui doit être partout non-nul pour que Σ soit une surface plongée.

Il peut être parfois laborieux de vérifier explicitement la condition de plongement pour une surface. On a alors intérêt à développer des idées générales permettant d'avoir des conditions suffisantes pour obtenir une surface plongée et ainsi éviter de traiter des cas particuliers un à la fois. Voici un exemple d'un tel résultat :

THÉORÈME 7.2. *Soit* $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable et* $c \in \mathbb{R}$*. Alors l'ensemble* $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\}$ *est une surface régulière si la différentielle* $(df)_p$ *est non-nulle pour tout* $p \in M$*.*

DMONSTRATION. L'hypothèse sur $(df)_p$ signifie qu'en chaque point $p \in M$ au moins une des dérivées partielles est non-nulle, disons $\frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0$ sans perte de généralité. Par le théorème des fonctions implicites on sait que, autour de p, on peut résoudre $f(x,y,z) = c$ par $f(h(y,z)) = c$ pour une certaine fonction lisse $h(y,z)$. Mais alors on a autour de p le plongement $\chi(y,z) = (h(y,z),y,z)$ et donc M est bien une surface régulière. □

Par exemple on peut reprendre la sphère S^2 en la considérant comme lieu d'annulation de la fonction $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Sa différentielle est donnée en $p = (x,y,z) \in S^2$ par

$$(df)_p = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$

Le seul point de $\mathbb{R}^3$ où $(df)_p$ est nulle est $(0,0,0)$ qui, de toutes façons, ne se trouve pas sur S^2. Le dernier théorème donne immédiatement que S^2 est surface plongée de $\mathbb{R}^3$.

8. Calcul différentiel sur les surfaces plongées

Nous procédons maintenant à une brève étude des applicarions dérivables, de classe C^k ou infiniment dérivables définies sur une surface régulière Σ ou encore vers Σ. Puisque la notion de dérivabilité est (1) locale et (2) connue pour des applications entres espaces euclidiens, la chose naturelle à faire est d'utiliser les systèmes de coordonnées locales sur Σ.

Définition 8.1. *On dit que* $F\colon \Sigma \to \mathbb{R}^n$ *est dérivable (respectivement de classe* C^k *ou* C^∞*) si, pour chaque* $p \in \Sigma$*, il existe un système de coordonnées locales* $\chi\colon \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_p$ *tel que* $F \circ \chi\colon \mathcal{U}_0 \to \mathbb{R}^n$ *soit une application dérivable (respectivement de classe* C^k *ou* C^∞*).*

Il est important de remarquer que ceci ne dépend pas de χ : si on a deux systèmes de coordonnées locales autour de $p \in \Sigma$, χ_1 et χ_2 , alors si $F \circ \chi_1$ est dérivable (respectivement de classe C^k ou C^∞), on aura $F \circ \chi_2 = (F \circ \chi_1) \circ (\chi_1^{-1} \circ \chi_2)$ qui sera dérivable (respectivement de classe C^k ou C^∞) comme composition d'applications de ce type.

De la même façon une application $F\colon \mathbb{R}^n \to \Sigma$ sera dite dérivable (respectivement de classe C^k ou C^∞) si autour de chaque $F(p) \in \Sigma$ on a un système de coordonnées locales $\chi\colon \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_{F(p)}$ tel que $\chi^{-1} \circ F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ soit dérivable (respectivement de classe C^k ou C^∞. Comme ci-dessus cette définition est en fait indépendante du choix de χ.

Etant donné une surface régulière Σ, on s'inspire de ce qui a été fait dans le cas de $\mathbb{R}^n$ pour donner une définition de *vecteur tangent à* Σ *en* p : il s'agit d'un vecteur X_p qui est le vecteur vitesse d'une courbe lisse dans Σ passant par p, c'est-à-dire qu'il existe $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \Sigma$ telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X_p$. On dénote par $T_p\Sigma$ l'ensemble de tous les vecteurs tangents à Σ en p

Lemme 8.2. *Soit* $\chi\colon \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_p$ *un système de coordonnées locales autour de* $p \in \Sigma$*. Alors* $T_p\Sigma$ *est engendré par* $\partial_u\chi(u_0, v_0)$ *et* $\partial_v\chi(u_0, v_0)$*, où* $\chi(u_0, v_0) = p$*.*

Dmonstration. C'est une conséquence facile de l'observation suivante laissée en exercice : si $\gamma\colon [a, b] \to \Sigma$ est une courbe régulière sur une surface Σ que l'on suppose entièrement contenue dans une système de coordonnées $\chi(\mathcal{U}_0) \subset \Sigma$, alors il existe une unique paire de fonctions lisses

$$a_1\colon [a, b] \to \mathbb{R}\ ,\ a_2\colon [a, b] \to \mathbb{R}$$

telles que $\gamma(t) = \chi(a_1(t), a_2(t))\ \forall t \in [a, b]$. □

Par la condition de régularité pour la surface Σ, on sait que $\partial_u\chi$ et $\partial_v\chi$ sont linéairement indépendants, donc en chaque point $p \in \Sigma$ on a que $T_p\Sigma$ est de dimension 2. Par ailleurs, comme nous l'avions fait pour $\mathbb{R}^n$, on peut considérer la notion de *fibré tangent de* Σ :

$$T\Sigma = \{(p, X_p) \mid p \in \Sigma, X_p \in T_p\Sigma\}.$$

avec projection $\pi\colon T\Sigma \to \Sigma$. Un champ de vecteurs tangents sur Σ est alors une application $Z\colon \Sigma \to T\Sigma$ telle que $\pi \circ Z = \mathrm{Id}_Z$. Par ailleurs en chaque $p \in \Sigma$ on a la décomposition en somme directe

$$T_p\mathbb{R}^3 = T_p\Sigma \oplus \nu_p.$$

En prenant le produit scalaire standard sur $T_p\mathbb{R}^3$ on peut alors choisir le sous-espace ν_p de dimension 1 pour qu'il soit orthogonal à $T_p\Sigma$. En faisant ceci pour chaque $p \in \Sigma$ on en arrive à la notion de *fibré normal à* Σ,

$$\nu(\Sigma) = \{(p, w) \mid p \in \Sigma, w \perp T_p\Sigma\}$$

et de champ de vecteurs *normal* à la surface Σ, une application $Y\colon \Sigma \to \nu(\Sigma)$ telle que $\pi \circ Y = \mathrm{Id}_\Sigma$.

Exemple. La sphère S^2 étant donnée par $f(x, y, z) = 0$, où $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, on considère le champ gradient ∇f donné par

$$\nabla f = 2x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} + 2z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Intuitivement, on a que ∇f est orthogonal à S^2 et on peut démontrer ceci rigoureusement : si $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ est une courbe de S^2 elle doit satisfaire

$$x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = 1$$

et en dérivant par rapport à t on obtient $2x'(t)x(t) + 2y'(t)y(t) + 2z'(t)z(t) = 0$ ce qui signifie que $\gamma'(t) \perp \nabla f(x(t), y(t), z(t))$ tel que prévu.

Finalement, pour $X_p \in T_p\Sigma$ et $f\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ dérivable nous avons la notion de dérivée directionnelle

$$X_p(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)\big|_{t=0}$$

pour $\gamma(t)$ une courbe sur Σ avec $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X_p$. Un champ de vecteurs tangent lisse sur Σ sera donné par

$$X = \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

avec des fonctions $a_i\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ lisses. Alors la dérivée directionnelle s'exprime comme

$$X(f) = \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

9. Formes extérieures sur $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$

Commençons par faire quelques rappels sur la dualité en algèbre linéaire. Pour simplifier la présentation nous traitons le cas $n = 3$, mais on pourra facilement retrouver les cas $n = 2$ et $n = 4$, ou même le cas général. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni d'une base $\{e_1, e_2, e_3\}$. L'*espace dual* à $\mathbb{R}^3$ est donné par

$$(\mathbb{R}^3)^* = \{\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ est linéaire}\}.$$

Il s'agit d'un espace vectoriel si on le munit des opérations d'addition et de multiplication scalaire résumées par la formule

$$(a\alpha + b\beta)(v) = a\alpha(v) + b\beta(v) \qquad (a, b \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^3).$$

A partir de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ on peut construire $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\} \subset (\mathbb{R}^3)^*$ à partir de la formule

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$$

que l'on étend par linéarité. Par exemple :

$$e_1^*(2e_1 + 3e_2 + 4e_3) = 2e_1^*(e_1) + 3e_1^*(e_2) + 4e_1^*(e_3) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 2.$$

Proposition 9.1. *L'ensemble* $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ *est une base de* $(\mathbb{R}^3)^*$.

Dmonstration. L'ensemble $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ est linéairement indépendant : en effet, si l'on suppose que l'on a

$$a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + a_3 e_3^* = 0_{(\mathbb{R}^3)^*}$$

en appliquant cette équation d'égalité d'applications successivement à e_1, e_2 et e_3, on obtient $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ce qui permet de conclure. Ensuite on doit montrer que l'ensemble engendre $(\mathbb{R}^3)^*$: si $\omega \in (\mathbb{R}^3)^*$, alors

$$\begin{aligned} \omega(v) &= \omega(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) = a_1 \omega(e_1) + a_2 \omega(e_2) + a_3 \omega(e_3) \\ &= \omega(e_1) e_1^*(v) + \omega(e_2) e_2^*(v) + \omega(e_3) e_3^*(v) \\ &= \big(\omega(e_1) e_1^* + \omega(e_2) e_2^* + \omega(e_3) e_3^*\big)(v) \end{aligned}$$

et comme ceci est valable pour tout $v \in \mathbb{R}^3$ on a bien

$$\omega = \omega(e_1) e_1^* + \omega(e_2) e_2^* + \omega(e_3) e_3^*$$

tel que demandé. □

Dans le cas général, un élément $\omega \in (\mathbb{R}^n)^*$ s'exprime comme

$$\omega = a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + \cdots + a_n e_n^*$$

pour certains réels $a_1, a_2, \cdots, a_n$ déterminant complètement ω.

Définition 9.2. *On appelle un élément de* $(\mathbb{R}^n)^*$ *une* 1*-forme extérieure sur* $\mathbb{R}^n$*. L'ensemble des* 1*-formes extérieures sur* $\mathbb{R}^n$ *est noté* $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$

Il est important de saisir ce que *fait* une 1-forme extérieure $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$: elle s'évalue sur des vecteurs $v \in \mathbb{R}^n$ et le résultat est un réel $\omega(v)$. On insiste pour que ce processus soit linéaire : $\omega(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha\omega(v_1) + \beta\omega(v_2)$.

Exemple. Evaluons $\omega = 4e_1^* + 2e_2^* - e_3^* \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ sur $v = 2e_1 + e_2 - 2e_3$:

$$\begin{aligned}
\omega(v) &= \big(4e_1^* + 2e_2^* - e_3^*\big)(2e_1 + e_2 - 2e_3) \\
&= 4e_1^*(2e_1 + e_2 - 2e_3) + 2e_2^*(2e_1 + e_2 - 2e_3) - e_3^*(2e_1 + e_2 - 2e_3) \\
&= 8 + 2 + 2 \\
&= 12.
\end{aligned}$$

Le calcul au long peut sembler laborieux mais, en fait, la linéarité des 1-formes extérieures et la dualité de bases donnant $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ permettent de rapidement simplifier les équations comme on le voit-ci-dessus.

Définition 9.3. *Etant donné deux* 1*-formes extérieures* $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ *on définit leur produit extérieur* $\omega_1 \wedge \omega_2 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *par*

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \ (v_1, v_2) = \begin{vmatrix} \omega_1(v_1) & \omega_2(v_1) \\ \omega_1(v_2) & \omega_2(v_2) \end{vmatrix}.$$

Explorons quelques exemples. Si $\omega_1 = 2e_1^* - 3e_2^*$ et $\omega_2 = e_1^* + e_2^*$ sont des 1-formes sur $\mathbb{R}^2$, alors en évaluant sur les différentes paires que l'on peut former à partir de la base $\{e_1, e_2\}$ on a

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \ (e_1, e_1) = 0 = \omega_1 \wedge \omega_2 \ (e_2, e_2) \qquad \text{(sans calcul explicite, pourquoi ?)}$$
$$\omega_1 \wedge \omega_2 \ (e_1, e_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 5$$
$$\omega_1 \wedge \omega_2 \ (e_2, e_1) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

Nous aurions pu commencer par des exemples encore plus simples :

$$e_1^* \wedge e_1^* \equiv 0 \equiv e_2^* \wedge e_1^*$$
$$e_1^* \wedge e_2^* \ (e_1, e_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$
$$e_1^* \wedge e_2^* \ (e_2, e_1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$
$$e_1^* \wedge e_2^* \ (\alpha e_1 + \beta e_2, e_2) = \alpha \ e_1^* \wedge e_2^* \ (e_1, e_2) + \beta \ \overbrace{e_1^* \wedge e_2^* \ (e_2, e_2)}^{0} = \alpha$$
$$e_1^* \wedge e_2^* \ (e_1, \alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha \ \underbrace{e_1^* \wedge e_2^* \ (e_1, e_1)}_{0} + \beta \ e_1^* \wedge e_2^* \ (e_1, e_2) = \beta$$

Conclusion : $e_1^* \wedge e_2^*$ est *bilinéaire* sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

En fait la propriété de bilinéarité est vraie pour toute $\omega_1 \wedge \omega_2$ définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, ce qui se vérifie aisément à partir de la définition

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \ (v_1, v_2) = \begin{vmatrix} \omega_1(v_1) & \omega_2(v_1) \\ \omega_1(v_2) & \omega_2(v_2) \end{vmatrix}.$$

Une autre propriété importante de l'application bilinéaire $\omega_1 \wedge \omega_2$ est son *anti-symétrie* :

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \ (v_2, v_1) = - \ \omega_1 \wedge \omega_2 \ (v_1, v_2),$$

qui découle directement de la définition après avoir remarqué que pour passer de l'un à l'autre, on permute tout simplement les lignes dans le déterminant 2×2. En particulier, on remarque que l'on a

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \ (v, v) = 0 \ (\forall v \in \mathbb{R}^n).$$

On dénote par $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $\omega_1 \wedge \omega_2$, pour $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$. On appelle un élément de $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ une 2-*forme extérieure sur* $\mathbb{R}^n$. Nous avons alors construit une application

$$\wedge\colon \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \times \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$$

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 \wedge \omega_2.$$

On vérifie facilement à partir de la définition

$$\omega_1 \wedge \omega_2\ (v_1, v_2) = \begin{vmatrix} \omega_1(v_1) & \omega_2(v_1) \\ \omega_1(v_2) & \omega_2(v_2) \end{vmatrix}$$

que l'on a

$$\omega_1 \wedge (\alpha\omega_2 + \beta\omega_3) = \alpha\ \omega_1 \wedge \omega_2 + \beta\ \omega_1 \wedge \omega_3$$

$$(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) \wedge \omega_3 = \alpha\ \omega_1 \wedge \omega_3 + \beta\ \omega_2 \wedge \omega_3$$

c'est-à-dire que $\wedge\colon \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \times \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ est bilinéaire. De plus la définition donne immédiatement que cette application est *alternée* : $\omega_2 \wedge \omega_1 = -\ \omega_1 \wedge \omega_2$. Ceci donne en particulier que pour toute 1-forme $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ on a $\omega \wedge \omega = 0_{\Lambda^2(\mathbb{R}^n)}$.

Interprétation géométrique de :

(1) L'effet d'une 1-forme $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ sur un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$.

Nous traitons le cas $n = 3$ pour fixer les idées, mais on retrouvera facilement le cas général. Grâce aux bases duales $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ et $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $(\mathbb{R}^3)^*$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement, on peut utiliser les correspondances suivantes

$$\omega = a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + a_3 e_3^* \longleftrightarrow (a_1, a_2, a_3)$$

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \longleftrightarrow (x_1, x_2, x_3)$$

qui nous permettent de décrire l'effet de ω sur v par

$$\omega(v) = (a_1, a_2, a_3) \cdot (x_1, x_2, x_3),$$

où "$\cdot$" est tout simplement le produit scalaire euclidien. Après *identification* de ω et v avec leurs coordonnées respectives, on peut donc écrire

$$\omega(v) = \omega \cdot v = \omega\Big(\frac{\omega \cdot v}{||\omega||^2}\ \omega\Big).$$

(2) L'effet de $\omega \wedge \eta$ sur (v_1, v_2).

Etant donnés $\omega, \eta \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ le scalaire tel que l'on ait $\omega \perp \eta - \lambda\omega$ dans $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$. Posons $\eta_\omega = \eta - \lambda\omega$. Remarquons alors que

$$\omega \wedge \eta_\omega = \omega \wedge (\eta - \lambda\omega) = \omega \wedge \eta - \lambda \overbrace{\omega \wedge \omega}^{0} = \omega \wedge \eta.$$

si bien que l'effet de $\omega \wedge \eta$ sur (v_1, v_2) est le même que celui de $\omega \wedge \eta_\omega$ et c'est cet effet que nous étudierons.
Soient

$$\widetilde{\omega} = \frac{\omega}{||\omega||} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\eta}_\omega = \frac{\eta_\omega}{||\eta_\omega||}.$$

si bien que $\{\widetilde{\omega}, \widetilde{\eta}_\omega\}$ est orthonormal dans $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$. De plus $\widetilde{\omega}(v_i)$ et $\widetilde{\eta}_\omega(v_i)$ sont respectivement scalaires de la projection de v_i sur $\widetilde{\omega}$ et $\widetilde{\eta}_\omega$. Ensuite comme

$$\widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\eta}_\omega \ (v_1, v_2) = \begin{vmatrix} \widetilde{\omega}(v_1) & \widetilde{\eta}_\omega(v_1) \\ \widetilde{\omega}(v_2) & \widetilde{\eta}_\omega(v_2) \end{vmatrix}$$

peut être interprété comme l'aire du parallélogramme défini par

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\omega}(v_1) \\ \widetilde{\eta}_\omega(v_1) \end{pmatrix} \text{ ainsi que } \begin{pmatrix} \widetilde{\omega}(v_2) \\ \widetilde{\eta}_\omega(v_2) \end{pmatrix}.$$

Dans le plan engendré par $\{\widetilde{\omega}, \widetilde{\eta}_\omega\}$, l'effet de $\widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\eta}_\omega$ sur (v_1, v_2) est d'envoyer parallélogramme de $\mathbb{R}^3$ (définit par v_1 et v_2) sur un parallélogramme dans le plan engendré par $\{\widetilde{\omega}, \widetilde{\eta}_\omega\}$.
Par ailleurs, on a

$$\widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\eta}_\omega = \frac{\omega}{||\omega||} \wedge \frac{\eta_\omega}{||\eta_\omega||} = \frac{1}{||\omega||||\eta_\omega||} \ \omega \wedge \eta_\omega$$

et donc

$$\omega \wedge \eta_\omega = ||\omega||||\eta_\omega|| \ \widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\eta}_\omega.$$

Comme par construction on avait que $\omega \perp \eta_\omega$, le terme $||\omega||||\eta_\omega||$ est l'aire du parallélogramme défini par ω et η_ω. Finalement notons que l'aire du parallélogramme défini par ω et η est égale à l'aire de celui défini par ω et η_ω. On a donc montré le résultat remarquable suivant :

THÉORÈME 9.4. *L'effet de $\omega \wedge \eta \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ sur (v_1, v_2) est donné géométriquement par*

$$\omega \wedge \eta(v_1, v_2) = \left|\text{Aire}(\{\omega, \eta\})\right| \times \text{Aire}(\text{Proj}_{<\omega,\eta>}\{v_1, v_2\}).$$

Attention : ceci ne donne pas une interprétation de l'effet d'un élément *quelconque* de $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ sur (v_1, v_2) puisque rien ne dit que tout élément de $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ s'exprime comme $\omega \wedge \eta$. Un élément de $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ de la forme $\omega \wedge \eta$ pour $\omega, \eta \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ est appelé une 2-forme extérieure *pure*. On peut montrer (voir TP) que : (1) tout élément de $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ est pur et (2) il existe des éléments de $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ qui ne sont pas purs, par exemple $e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$.

Base de $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$.

Il y a plusieurs éléments remarquables de $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$: pour $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$ et $\{e_1^*, e_2^*, \cdots e_n^*\}$ base duale de $(\mathbb{R}^n)^*$, on a $e_i^* \wedge e_j^* \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq i, j \leq n$. De plus on sait que $e_i^* \wedge e_i^* = 0_{\Lambda^2(\mathbb{R}^n)}$ et $e_j^* \wedge e_i^* = -\, e_i^* \wedge e_j^*$. Soit alors

$$\mathcal{B} = \{e_i^* \wedge e_j^* \mid 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Affirmation : $\mathcal{B}$ est une base de $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$. on montre premièrement l'indépendance linéaire. Si l'on suppose que l'on a

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}\ e_i^* \wedge e_j^* = 0_{\Lambda^2(\mathbb{R}^n)}$$

que l'on applique à (e_i, e_j), on obtient directement $a_{ij} = 0$ pour tous $1 \leq i < j \leq n$ tel que voulu. Montrons ensuite que $\mathcal{B}$ engendre $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$. Soit $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ un élément quelconque. On sait qu'une application bilinéaire $\omega\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilinéaire est complètement déterminée par sa matrice

$$\big(a_{ij}\big) = \Big(\omega(e_i, e_j)\Big) \qquad (1 \leq i, j \leq n).$$

Comme ω est anti-symétrique, on a en fait que ω est complètement déterminée par les coefficients a_{ij} pour $1 \leq i < j \leq n$. On a alors

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \omega(e_i, e_j)\ e_i^* \wedge e_j^*$$

car pour $1 \leq k < l \leq n$ on a

$$\omega(e_k, e_l) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \omega(e_i, e_j) \underbrace{e_i^* \wedge e_j^*\ (e_k, e_l)}_{1 \text{ ou } 0},$$

où les termes à droite valent 1 lorsque $i = k$ et $j = l$ ou valent 0 sinon.

On a donc la formule générale pour la dimension de $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\dim \Lambda^2(\mathbb{R}^n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

On s'intéresse particulièrement aux cas de petite dimension n pour ce cours :

$$\Lambda^2(\mathbb{R}) = \{0\}$$
$$\Lambda^2(\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R} \text{ avec base } \{e_1^* \wedge e_2^*\}$$
$$\Lambda^2(\mathbb{R}^3) \simeq \mathbb{R}^3 \text{ avec base } \{e_1^* \wedge e_2^*, e_1^* \wedge e_3^*, e_2^* \wedge e_3^*\}$$
$$\Lambda^2(\mathbb{R}^4) \simeq \mathbb{R}^6 \text{ avec base } \{e_1^* \wedge e_2^*, e_1^* \wedge e_3^*, e_1^* \wedge e_4^*, e_2^* \wedge e_3^*, e_2^* \wedge e_4^*, e_3^* \wedge e_4^*\}$$

Après avoir exploré explicitement les cas de $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ et $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$, nous pouvons maintenant traiter le cas général $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ des *k-formes extérieures sur* $\mathbb{R}^n$. Etant donnés des éléments $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k$ dans $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ on définit

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k \colon \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ fois}} \to \mathbb{R}$$

par

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k \ (v_1, v_2, \ldots, v_k) = \begin{vmatrix} \omega_1(v_1) & \omega_2(v_1) & \cdots & \omega_k(v_1) \\ \omega_1(v_2) & \omega_2(v_2) & \cdots & \omega_k(v_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \omega_1(v_k) & \omega_2(v_k) & \cdots & \omega_k(v_k) \end{vmatrix}$$

Les propriétés élémentaires du déterminant d'une matrice $k \times k$ permettent de montrer que :

(1) L'application $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \omega_k$ est k-linéaire (i.e. linéaire dans chaque facteur $\mathbb{R}^n$ de sa définition).

(2) L'application $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k$ est anti-symétrique au sens où

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k \ (v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_k) = -\, \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \omega_k \ (v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_k).$$

En particulier, on note que l'on a $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k \ (v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_i, \cdots, v_k) = 0$ pour tous $1 \leq i \leq n$. La propriété d'anti-symétrie se généralise aisément à une permutation quelconque $\sigma \in \mathfrak{S}_k$:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k \ (v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sign} \sigma \ \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k \ (v_1, v_2, \cdots, v_k).$$

(3) En tant qu'applications, lorsque l'on fait une transposition de deux 1-formes, on a la relation

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_j \wedge \cdots \omega_i \wedge \cdots \omega_k = -\, \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_j \wedge \cdots \wedge \omega_k.$$

Et plus généralement pour une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ on a

$$\omega_{\sigma(1)} \wedge \omega_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(k)} = \operatorname{sign}\sigma\ \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k.$$

Comme dans le cas de $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$, on peut obtenir (preuve laissée en exercice) une base de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ en considérant

$$\mathcal{B} = \{e^*_{i_1} \wedge e^*_{i_2} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}.$$

Ceci nous donne directement que

$$\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exemple. L'espace $\Lambda^3(\mathbb{R}^4)$ est engendré par l'ensemble de 4 éléments

$$\{e^*_1 \wedge e^*_2 \wedge e^*_3, e^*_1 \wedge e^*_2 \wedge e^*_4, e^*_1 \wedge e^*_3 \wedge e^*_4, e^*_2 \wedge e^*_3 \wedge e^*_4\}.$$

Observons par ailleurs que la formule $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ permet de montrer l'isomorphisme $\Lambda^k(\mathbb{R}^n) \simeq \Lambda^{n-k}(\mathbb{R}^n)$. Par exemple $\Lambda^3(\mathbb{R}^4) \simeq \Lambda^1(\mathbb{R}^4)$, et on rappelle qu'une base de ce dernier espace est $\{e^*_1, e^*_2, e^*_3, e^*_4\}$. Un autre exemple est $\Lambda^n(\mathbb{R}^n) \simeq \Lambda^0(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}$, où une base de $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ est engendré par $\{e^*_1 \wedge e^*_2 \wedge \cdots \wedge e^*_n\}$. On appelle un élément $\omega \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ une *forme volume* et la n-forme extérieure $e^*_1 \wedge e^*_2 \wedge \cdots \wedge e^*_n$ est appelée *forme volume standard.* Elle est donnée explicitement par

$$\begin{aligned} e^*_1 \wedge e^*_2 \wedge \cdots \wedge e^*_n\ (v_1, v_2, \cdots, v_n) &= \begin{vmatrix} e^*_1(v_1) & e^*_2(v_1) & \cdots & e^*_n(v_1) \\ e^*_1(v_2) & e^*_2(v_2) & \cdots & e^*_n(v_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ e^*_1(v_n) & e^*_2(v_n) & \cdots & e^*_n(v_n) \end{vmatrix} \\ &= \det(v_1 v_2 \cdots v_n) \\ &= \mathrm{Vol}(\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}) \end{aligned}$$

où le dernier terme représente le volume orienté du parallélépidède dans $\mathbb{R}^n$ basé sur les vecteurs $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$.

Puisque $\dim \Lambda^n(\mathbb{R}^n) = 1$ on sait que tout élément $\omega \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ s'écrit comme

$$\omega = \alpha_\omega\ e^*_1 \wedge e^*_2 \wedge \cdots \wedge e^*_n,$$

pour un certain $\alpha_\omega \in \mathbb{R}$. On peut alors définir l'*opérateur de Hodge*

$$*\colon \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^{n-k}(\mathbb{R}^n)$$

de la façon suivante. Un élément quelconque ω de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ s'écrit comme

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 i_2 \cdots i_k} \; e^*_{i_1} \wedge e^*_{i_2} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_k}.$$

Nous introduisons la notation abrégée

$$\omega = \sum_I \alpha_I e^*_I$$

où l'on a :

I : ensemble de k éléments croissants parmi $\{1, 2, \cdots, n\}$;

α_I est un réel associé à I ;

$e^*_I = e^*_{i_1} \wedge e^*_{i_2} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_k}$ si l'on a $I = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$.

Remarquons que $I \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$, un ensemble ordonné de k éléments en ordre croissant, donne lieu à un unique ensemble, également ordonné de manière croissante, I^c qui est le complément de I dans $\{1, 2, \cdots n\}$. On est alors prêt à définir l'opérateur de Hodge : on pose

$$*\omega = \sum_I \alpha_I * e^*_I$$

où l'on a $*e^*_I = \epsilon_I e^*_{I^c}$ avec

$$\epsilon_I = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad e^*_I \wedge e^*_{I^c} = e^*_1 \wedge e^*_2 \wedge \cdots \wedge e^*_n \\ -1 & \text{si} \quad e^*_I \wedge e^*_{I^c} = -\, e^*_1 \wedge e^*_2 \wedge \cdots \wedge e^*_n \end{cases}$$

Autrement dit, on définit l'opérateur de Hodge $*$ sur les e^*_I de façon à ce que

$$e^*_I \wedge *e^*_I = e^*_1 \wedge e^*_2 \wedge \cdots \wedge e^*_n,$$

c'est-à-dire que $e^*_I \wedge *e^*_I$ soit la forme volume standard sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple. Soit $\omega = 3e^*_1 \wedge e^*_2 + e^*_1 \wedge e^*_3 - e^*_2 \wedge e^*_3$ dans $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$. Alors on a

$$*\omega = 3 * (e^*_1 \wedge e^*_2) + *(e^*_1 \wedge e^*_3) - *(e^*_2 \wedge e^*_3).$$

On calcule

$$* \, (e^*_1 \wedge e^*_2) = +1 \; e^*_3$$
$$* \, (e^*_1 \wedge e^*_3) = -1 \; e^*_2$$
$$* \, (e^*_2 \wedge e^*_3) = +1 \; e^*_1$$

et donc on trouve $*\omega = 3e^*_3 - e^*_2 - e^*_1$.

Discutons la construction du produit extérieur en général. On définit

$$\wedge\colon \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \times \Lambda^l(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^{k+l}(\mathbb{R}^n)$$

de la façon suivante : si on a $\alpha = \sum\limits_I \alpha_I e_I^* \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ et $\beta = \sum\limits_J \beta_J e_J^* \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$, on pose

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{I,J} \alpha_I \beta_J \; e_I^* \wedge e_J^*.$$

On doit faire ici plusieurs remarques :
(1) Cette expression est relativement simple à écrire dans la notation abrégée mais, si on l'écrit explicitement, c'est assez long.
(2) Heureusement dans le développement au long, de nombreux termes *s'annullent* : a chaque fois qu'un élément de I et un élément de J ont un e_i^* en commun, le résultat du produit extérieur est nul pour ces deux termes.
(3) L'expression à droite dans la définition de $\alpha \wedge \beta$ (dans $\Lambda^{k+l}(\mathbb{R}^n)$) devra en général être réécrite en fonction de la base

$$\mathcal{B} = \{e_{m_1}^* \wedge e_{m_2}^* \wedge \cdots \wedge e_{m_{k+l}}^* \mid 1 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_{k+l} \leq n\}$$

de l'espace $\Lambda^{k+l}(\mathbb{R}^n)$.

Exemple. Etant donnés $\alpha = e_1^* - e_2^* + 2e_3^* \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ et $\beta = 2e_1^* \wedge e_2^* - e_1^* \wedge e_3^* + e_2^* \wedge e_3^* \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ on a

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= (e_1^* - e_2^* + 2e_3^*) \wedge (2e_1^* \wedge e_2^* - e_1^* \wedge e_3^* + e_2^* \wedge e_3^*) \\ &= 4e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*. \end{aligned}$$

PROPOSITION 9.5. *Si $\alpha \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ et $\beta \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$ alors on a $\beta \wedge \alpha = (-1)^{kl} \alpha \wedge \beta$.*

DMONSTRATION. Exercice. □

10. Réalisation géométrique du formalisme des formes extérieures

Ce que nous avons fait lors de la section précédente est en fait très général : étant donné un espace vectoriel V on peut construire $\Lambda^k(V)$ l'espace des k-formes extérieures sur V. Dans cette section nous voulons explorer la situation où l'espace vectoriel considéré est $T_p\mathbb{R}^3$. On se souvient que cet espace de dimension 3 a pour base

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \right\}.$$

Son espace dual $(T_p\mathbb{R}^3)^*$ possède alors une base duale que nous notons $\{(dx)_p, (dy)_p, (dz)_p\}$. Ceci peut surprendre le lecteur, la lectrice attentifs étant donné ce que nous avons construit avec soin comme étant la différentielle d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en un point p. Rappelons que $(df)_p\colon T_p\mathbb{R}^3 \to T_{f(p)}\mathbb{R}$. L'idée clé pour comprendre le lien entre les deux est d'utiliser l'isomorphisme $T_{f(p)}\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$. Cet isomorphisme permet de considérer l'application linéaire $(df)_p$ comme une 1-forme extérieure sur $T_p\mathbb{R}^3$:

$$(df)_p\colon T_p\mathbb{R}^3 \to T_{f(p)}\mathbb{R} \simeq \mathbb{R} \quad \text{linéaire.}$$

En particulier si l'on considère les trois fonctions suivantes

$$\begin{aligned} x\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} &\quad \text{donnée par } (x,y,z) \mapsto x \\ y\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} &\quad \text{donnée par } (x,y,z) \mapsto y \\ z\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} &\quad \text{donnée par } (x,y,z) \mapsto z \end{aligned}$$

alors on peut voir les applications

$$\begin{aligned} (dx)_p &\colon T_p\mathbb{R}^3 \to T_{x(p)}\mathbb{R} \simeq \mathbb{R} \\ (dy)_p &\colon T_p\mathbb{R}^3 \to T_{y(p)}\mathbb{R} \simeq \mathbb{R} \\ (dz)_p &\colon T_p\mathbb{R}^3 \to T_{z(p)}\mathbb{R} \simeq \mathbb{R} \end{aligned}$$

comme des éléments de $(T_p\mathbb{R}^3)^*$. Analysons l'effet de chacune sur la base standard de $T_p\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} (dx)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p\right) &= \frac{d}{dt}\ x(p+t(1,0,0))\Big|_{t=0} = 1 \\ (dx)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p\right) &= \frac{d}{dt}\ x(p+t(0,1,0))\Big|_{t=0} = 0 \\ (dx)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p\right) &= \frac{d}{dt}\ x(p+t(0,0,1))\Big|_{t=0} = 0 \end{aligned}$$

$$(dy)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p\right) = \frac{d}{dt}\ y(p+t(1,0,0))\big|_{t=0} = 0$$
$$(dy)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p\right) = \frac{d}{dt}\ y(p+t(0,1,0))\big|_{t=0} = 1$$
$$(dy)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p\right) = \frac{d}{dt}\ y(p+t(0,0,1))\big|_{t=0} = 0$$

$$(dz)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p\right) = \frac{d}{dt}\ z(p+t(1,0,0))\big|_{t=0} = 0$$
$$(dz)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p\right) = \frac{d}{dt}\ z(p+t(0,1,0))\big|_{t=0} = 0$$
$$(dz)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p\right) = \frac{d}{dt}\ z(p+t(0,0,1))\big|_{t=0} = 1$$

Conclusion : L'effet de $\{(dx)_p, (dy)_p, (dz)_p\}$ définies à partir des trois fonctions

$$x, y, z \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

sur la base $\{(\frac{\partial}{\partial x})_p, (\frac{\partial}{\partial y})_p, (\frac{\partial}{\partial z})_p, \}$ permet de conclure que ce sont bien des bases duales l'une de l'autre.

Chapitre 2

Formes différentielles dans $\mathbb{R}^n$

1. Des formes extérieures aux formes différentielles

En très bref, voici la transition entre le chapitre 1 et le chapitre 2 exprimée sous forme d'un tableau :

Chapitre I	Chapitre II
Algèbre (multi)linéaire	Calcul différentiel
p point fixé	p point variable
Formes extérieures sur $T_p\mathbb{R}^n$	Formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$

La transition est essentiellement la même que celle déjà effectuée pour passer des vecteurs tangents de $\mathbb{R}^n$ aux champs de vecteurs tangents de $\mathbb{R}^n$. Nous allons construire les k-formes différentielles à partir de ce que nous avons fait au chapitre précédent alors que nous avons défini les k-formes extérieures. Pour $k = 0$ on se souvient de l'isomorphisme

$$\Lambda^0(T_p\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}.$$

Si l'on fait maintenant varier $p \in \mathbb{R}^n$ on obtient donc tout simplement une *fonction* $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On a donc l'ensemble de 0-*formes différentielles sur* $\mathbb{R}^n$:

$$\Omega^0(\mathbb{R}^n) = \{f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f \text{ est lisse}\}.$$

Pour $k = 1$ on se souvient que l'espace $\Lambda^1(T_p\mathbb{R}^n)$ a pour base $\{(dx_1)_p, \ldots, (dx_n)_p\}$ et un élément quelconque s'écrit comme

$$\omega_p = a_1(dx_1)_p + \cdots a_n(dx_n)_p,$$

où $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. En faisant varier $p \in \mathbb{R}^n$, on obtient une 1-*forme différentielle sur* $\mathbb{R}^n$:

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n$$

où $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des fonctions lisses de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On a alors par définition que

$$\omega(p) = f_1(p)(dx_1)_p + f_2(p)(dx_2)_p + \cdots + f_n(p)(dx_n)_p.$$

On dénote par $\Omega^1(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble de toutes les 1-formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple. L'expression $\omega = xdx - ydy + z^2dz$ est un élément de $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$. En fixant un point $p = (x_0, y_0, z_0)$ on obtient $\omega(p) \in \Lambda^1(T_p\mathbb{R}^3)$ donné par

$$\omega(p) = x_0(dx)_p - y_0(dy)_p + z_0^2(dz)_p$$

satisfaisant

$$\begin{aligned} \omega(p)\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)_p \Big) &= x_0 \\ \omega(p)\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)_p \Big) &= -y_0 \\ \omega(p)\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)_p \Big) &= z_0^2. \end{aligned}$$

Les 1-formes différentielles peuvent être ajoutées entre elles selon la définition suivante : si $\omega = f_1dx_1 + \cdots + f_ndx_n$ et $\eta = g_1dx_1 + \cdots + g_ndx_n$ alors

$$\omega + \eta = (f_1 + g_1)dx_1 + \cdots (f_n + g_n)dx_n.$$

De même pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on définit

$$\alpha\omega = (\alpha f_1)dx_1 + \cdots + (\alpha f_n)dx_n.$$

Remarque importante. (Dualité) L'isomorphisme $\Lambda^1T_p\mathbb{R}^n \simeq T_p\mathbb{R}^n$ construit au chapitre précédent permet de faire correspondre naturellement à une 1-forme différentielle ω un champ de vecteurs X_ω et, réciproquement, à un champ de vecteurs X on peut associer une 1-forme différentielle ω_X. Cette correspondance sous dualité sera notée par le symbole "$\sharp$", c'est-à-dire que l'on a

$$X_\omega = \sharp\omega \qquad \text{et} \qquad \omega_X = \sharp X.$$

Bien évidemment, par construction, on a que $\sharp^2 = \sharp \circ \sharp$ est l'identité autant sur les champs de vecteurs que sur les 1-formes. On appelle "$\sharp$" l'*isomorphisme musical* entre les champs de vecteurs et les 1-formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$.

Lorsque $k = 2$ on a $\Lambda^2(T_p\mathbb{R}^n)$ engendré par $(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p$ $(1 \leq i < j \leq n)$ et en variant le point $p \in \mathbb{R}^n$ on obtient la notion *2-forme différentielle* donnée formellement par

$$\omega = \sum_{1\leq i<j\leq n} f_{ij}\ dx_i \wedge dx_j$$

où chacune des $\binom{n}{2}$ fonctions $f_{ij} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est lisse. On a alors que ω envoie $p \in \mathbb{R}^n$ sur

$$\omega(p) = \sum_{1\leq i<j\leq n} f_{ij}(p)\ (dx_i)_p \wedge (dx_j)_p$$

élément de $\Lambda^2 T_p\mathbb{R}^n$. On dénote par $\Omega^2(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble de toutes les 2-formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$.

A l'aide du produit extérieur, étant donné deux 1-formes différentielles α_1 et α_2 on peut construire la 2-forme différentielle $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ en généralisant ce qui a été fait dans la section sur les formes extérieures. Par exemple, étant donné $\alpha_1 = xdx - dy + x^2dz$ ainsi que $\alpha_2 = zdx + xdy - z^3dz$, on a $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ donnée par

$$\begin{aligned}\alpha_1 \wedge \alpha_2 &= (xdx - dy + x^2dz) \wedge (zdx + xdy - z^3dz)\\ &= (x^2 + z)\ dx \wedge dy + (z^3 - x^3)\ dy \wedge dz - (xz^3 + x^2z)\ dx \wedge dz\end{aligned}$$

Après avoir vu quelques cas particuliers, on peut maintenant donner la définition générale :

DÉFINITION 1.1. *On appelle k-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ une expression de la forme*

$$\omega = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} f_{i_1 i_2\cdots i_k}\ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

où chacune des $\binom{n}{k}$ fonctions $f_{i_1 i_2\cdots i_k} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est lisse.

Une k-forme différentielle ω est donc une application de $\mathbb{R}^n$ vers $\Lambda^k T\mathbb{R}^n$ donnée par $p \mapsto \omega(p) \in \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)$. On dénote par $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des k-formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ? (Attention au piège...)

Comme précédemment, on utilise souvent la notation abrégée et facile à manipuler formellement

$$\omega = \sum_I f_I dx_I$$

où

$$I \text{ est un multi-index ordonné } \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$$

$$f_I \text{ est fonction de } \mathbb{R}^n \text{ vers } \mathbb{R} \text{ associée à } I$$

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \ (i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$$

Deux k-formes différentielles $\alpha = \sum_I f_I dx_I$ et $\beta = \sum_I g_I dx_I$ sont dites égales si l'on a $f_I = g_I$ pour tout I.

Exemple. (n-formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$) Elles sont toutes du type

$$\omega = f \ dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

pour une fonction $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Exemple. ($(n-1)$-formes différentielle sur $\mathbb{R}^n$) Elles sont de la forme

$$\omega = f_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n + f_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n + \cdots + f_n dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1},$$

ce qui peut s'écrire de façon plus économe comme

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \ dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

où le symbole "$\widehat{dx_i}$" signifie que l'on omet le facteur dx_i dans l'expression.

On a la notion de produit extérieur de formes différentielles

$$\wedge \colon \Omega^k(\mathbb{R}^n) \times \Omega^l(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{k+l}(\mathbb{R}^n)$$

défini pour des formes différentielles $\alpha = \sum_I f_I dx_I$ et $\beta = \sum_I g_I dx_I$ par

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{I,J} f_I g_J \ dx_I \wedge dx_J.$$

Exemple. Les calculs sont exactement les mêmes que ceux rencontrés pour le produit extérieur des formes extérieures. Par exemple

$$\begin{aligned}(ydx + xdy) \wedge (x \ dx \wedge dz + y \ dy \wedge dz) &= y^2 \ dx \wedge dy \wedge dz + x^2 \ dy \wedge dx \wedge dz \\ &= (y^2 - x^2) \ dx \wedge dy \wedge dz\end{aligned}$$

Proposition 1.2. *Si $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ et $\beta \in \Omega^l(\mathbb{R}^n)$ alors on a $\beta \wedge \alpha = (-1)^{kl} \alpha \wedge \beta$.*

Dmonstration. On commence par observer que l'on a

$$\begin{aligned}
dx_I \wedge dx_J &= dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \\
&= (-1)^k dx_{j_1} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \\
&= (-1)^{2k} dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_3} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \\
&\vdots \\
&= (-1)^{kl} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\
&= (-1)^{kl} dx_K \wedge dx_I
\end{aligned}$$

Ceci nous permet de conclure que

$$\beta \wedge \alpha = \sum_{I,J} g_J f_I \; dx_J \wedge dx_I = (-1)^{kl} \sum_{I,J} f_J g_J \; dx_I \wedge dx_J = (-1)^{kl} \alpha \wedge \beta.$$

□

Corollaire 1.3. *Pour toute forme différentielle de degré impair $\alpha \in \Omega^{2k+1}(\mathbb{R}^n)$ on a $\alpha \wedge \alpha = 0$.*

Dmonstration. Immédiat. □

Il découle par ailleurs de ce qui a été fait pour les formes extérieures que l'on a la bilinéarité du produit extérieur de formes différentielles :

$$\begin{aligned}
\omega \wedge (f\eta_1 + g\eta_2) &= f \; \omega \wedge \eta_1 + g \; \omega \wedge \eta_2 \\
(f\omega_1 + g\omega_2) \wedge \eta &= f \; \omega_1 \wedge \eta + g \; \omega_2 \wedge \eta
\end{aligned}$$

où $\omega, \eta, \omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2$ sont des formes différentielles quelconques alors que f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Exemples.
(1) Calculons

$$(xdx+ydy)\wedge(ydx+xdy) = xy \underbrace{dx \wedge dx}_{0} + x^2 dx\wedge dy + y^2 dy \wedge dx + xy \underbrace{dy \wedge dy}_{0} = (x^2-y^2)\, dx \wedge dy.$$

(2) Calculons

$$\begin{aligned}
&(xdx + ydy) \wedge (xzdx \wedge dz + yzdy \wedge dz) \\
&\quad = x^2 z \underbrace{dx \wedge dx}_{0} \wedge dz + xyz\ dx \wedge dy \wedge dz + xyz\ dy \wedge dx \wedge dz + y^2 z \underbrace{dy \wedge dy}_{0} \wedge dz \\
&\quad = (xyz - xyz)\ dx \wedge dy \wedge dz = 0
\end{aligned}$$

Attention : Il existe des formes différentielles $\eta \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ telle que $\eta \wedge \eta \neq 0$... Par exemple on vérifiera aisément que pour $\eta = x_1\ dx_1 \wedge dx_2 + x_4\ dx_3 \wedge dx_4$ on a

$$\eta \wedge \eta = 2x_1 x_4\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

2. La notion de dérivée extérieure

Cet objet $d\colon \Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$, fondamental pour le cours, est construit en deux étapes.

Cas des 0-formes. L'opérateur $d\colon \Omega^0(\mathbb{R}^n) \to \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ s'applique sur une 0-forme, c'est-à-dire une fonction lisse $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pour donner $df \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$. On définit tout simplement

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\ dx_i,$$

c'est-à-dire qu'en chaque $p \in \mathbb{R}^n$ on a

$$df(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\ (dx_i)_p \in \Lambda^1(T_p\mathbb{R}^n).$$

Notons que ceci correspond à un élément de $T_p\mathbb{R}^n$ sous la dualité $\{(dx_i)_p\} \leftrightarrow \{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\}$. Quel est le dual de $df(p)$? C'est tout simplement le gradient $\nabla f(p)$ de f en p. Ceci étant valable en chaque $p \in \mathbb{R}^n$, on voit donc que la 1-forme différentielle $df \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ correspond à ∇f sous dualité.

Proposition 2.1. *L'opérateur $d\colon \Omega^0(\mathbb{R}^n) \to \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ satisfait les propriétés suivantes :*

(1) (Linéarité) $d(af + bg) = adf + bdg$ $(\forall f, g \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)\ \forall a, b \in \mathbb{R})$.

(2) (Leibniz) $d(fg) = fdg + gdf$ $(\forall f, g \in \Omega^0(\mathbb{R}^n))$.

Dmonstration. Ceci découle des propriétés analogues pour les dérivées partielles de fonctions. Par exemple pour la propriété de Leibniz :

$$\begin{aligned} d(fg) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(fg)\ dx_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(f\frac{\partial g}{\partial x_i} + g\frac{\partial f}{\partial x_i}\big)\ dx_i \\ &= f\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}\ dx_i + g\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\ dx_i \\ &= fdg + gdf. \end{aligned}$$

□

Cas des k-formes. On définit $d\colon \Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ de la façon suivante. Pour un élément quelconque $\alpha = \sum\limits_I f_I dx_I \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ on pose

$$d\alpha = \sum_I df_I \wedge dx_I.$$

Explicitons cette définition pour mieux la saisir. Par la définition de différentielle d'une fonciton on a

$$d\alpha = \sum_I \big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\ dx_k\big) \wedge dx_I$$

et pour chaque indice I donné on remarque que l'on a

$$\begin{aligned} \big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\ dx_k\big) \wedge dx_I &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\ dx_k \wedge dx_I \\ &= \sum_{\substack{k\in\{1,2,\dots,n\} \\ k\notin I}} \frac{\partial f}{\partial x_k}\ dx_k \wedge dx_I \end{aligned}$$

L'effet de d sur un élément $f_I dx_I$ est donc de le transformer en somme de termes de la forme $dx_k \wedge dx_I$ ($k \notin I$) pondérés par la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. Puisque ce sera particulièrement utile pour la suite du cours, nous explicitons le calcul de l'effet de la dérivée extérieure sur les 1-formes et les 2-formes différentielles :

Etant donné une 1-forme différentielle $\alpha = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$, on a

$$\begin{aligned}
d\alpha &= \sum_{i=1}^{n} df_i \wedge dx_i = \sum_{i=1}^{n} \big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\ dx_j \big) \wedge dx_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\ dx_j \wedge dx_i = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\ dx_j \wedge dx_i \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\ dx_j \wedge dx_i + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\ dx_j \wedge dx_i \\
&= - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\ dx_i \wedge dx_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\ dx_i \wedge dx_j
\end{aligned}$$

et donc on obtient finalement

$$\boxed{d\alpha = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \big)\ dx_i \wedge dx_j}$$

En particulier notons que pour une 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$, disons $\alpha = f dx + g dy + h dz$, on a

$$d\alpha = \big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \big)\ dx \wedge dy + \big(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} \big)\ dx \wedge dz + \big(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \big)\ dy \wedge dz.$$

Par exemple on a

$$\begin{aligned}
d\big((x+y)dx + y^2 dy + (3x^3 + 2z)dz\big) &= [1dx + 1dy] \wedge dx + [2ydy] \wedge dy + [9x^2 dx + 2dz] \wedge dz \\
&= dy \wedge dx + 9x^2 dx \wedge dz \\
&= -\ dx \wedge dy + 9x^2 dx \wedge dz
\end{aligned}$$

Pour ce qui est maintenant de l'effet sur les 2-formes différentielles, si on considère la 2-forme $\alpha = \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij}\ dx_i \wedge dx_j$, alors on a

$$\begin{aligned}
d\alpha = \sum_{1\leq i<j\leq n} df_{ij}\wedge dx_i\wedge dx_j &= \sum_{1\leq i<j\leq n}\big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k}\,dx_k\big)\wedge dx_i\wedge dx_j\\
= \sum_{1\leq k<i<j\leq n}\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k}\,dx_k\wedge dx_i\wedge dx_j &+ \sum_{1\leq i<k<j\leq n}\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k}\,dx_k\wedge dx_i\wedge dx_j\\
&+ \sum_{1\leq i<j<k\leq n}\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k}\,dx_k\wedge dx_i\wedge dx_j\\
= \sum_{1\leq i<j<k\leq n}\frac{\partial f_{jk}}{\partial x_i}\,dx_i\wedge dx_j\wedge dx_k &+ \sum_{1\leq i<j<k\leq n}\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_j}\,dx_j\wedge dx_i\wedge dx_k\\
&+ \sum_{1\leq i<j<k\leq n}\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k}\,dx_k\wedge dx_i\wedge dx_j
\end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$d\alpha = \boxed{\sum_{1\leq i<j<k\leq n}\big(\frac{\partial f_{jk}}{\partial x_i}-\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_j}+\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k}\big)\;dx_i\wedge dx_j\wedge dx_k}$$

En particulier pour une 2-forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$ qui est donnée par l'expression $\alpha = fdx\wedge dy + gdx\wedge dz + hdy\wedge dz$ on a

$$d\alpha = \big(\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\big)\;dx\wedge dy\wedge dz.$$

PROPOSITION 2.2. *La dérivée extérieure $d\colon \Omega^k(\mathbb{R}^n)\to\Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ satisfait les propriétés suivantes :*

(1) (Linéarité) $d(a\alpha+b\beta) = ad\alpha + bd\beta$ $(\forall\alpha,\beta\in\Omega^k(\mathbb{R}^n),\ \forall a,b\in\mathbb{R})$.

(2) (Leibniz généralisée) $d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge d\beta$ $(\forall\alpha\in\Omega^k(\mathbb{R}^n),\ \forall\beta\in\Omega^l(\mathbb{R}^n))$

DMONSTRATION. (1) Exercice.

(2) Etant donné $\alpha = \sum\limits_I f_I dx_I$ et $\beta = \sum\limits_J g_J dx_J$ on a

$$\begin{aligned}
d(\alpha\wedge\beta) = d\big(\sum_{I,J} f_I g_J\;dx_I\wedge dx_J\big) &= \sum_{I,J} d(f_I g_J)\wedge dx_I\wedge dx_J\\
&= \sum_{I,J}(f_I dg_J + g_J df_I)\wedge dx_I\wedge dx_J\\
&= \sum_{I,J} df_I\wedge dx_I\wedge g_J dx_J + \sum_{I,J}(-1)^k f_I\;dx_I\wedge dg_J\wedge dx_J\\
&= d\alpha\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge d\beta
\end{aligned}$$

□

La propriété fondamentale de la dérivée extérieure, sur laquelle une partie importante de la suite de ce cours reposera, est résumée en une simple équation

$$\boxed{d^2 = 0}$$

Plus précisément on a

Théorème 6. *Pour toute forme différentielle $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ de classe au moins C^2, on a que $d(d\omega) = 0 \in \Omega^{k+2}(\mathbb{R}^n)$.*

Dmonstration. Soit $\omega = \sum_I f_I dx_I$ une k-forme différentielle de classe au moins C^2, on a alors

$$\begin{aligned}
d(d\omega) &= d\Big(\sum_I df_I \wedge dx_I\Big) \\
&= d\Big(\sum_I \Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x_j}\ dx_j\Big) \wedge dx_I\Big) \\
&= d\Big(\sum_I \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x_j}\ dx_j \wedge dx_I\Big) \\
&= \sum_I \Big(\sum_{j=1}^n d\Big(\frac{\partial f_I}{\partial x_j}\Big)\ dx_j\Big) \wedge dx_I
\end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n d\Big(\frac{\partial f_I}{\partial x_j}\Big)\ dx_j &= \sum_{j=1}^n \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_i \partial x_j}\ dx_i\Big) \wedge dx_j \\
&= \sum_{1 \le i < j \le n} \underbrace{\Big(\frac{\partial^2 f_I}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_j \partial x_i}\Big)}_{0}\ dx_i \wedge dx_j \\
&= 0
\end{aligned}$$

parce que nous avons supposé que ω est au moins de classe C^2 et, conséquemment, toutes les f_I sont également au moins de classe C^2 et satisfont donc $\frac{\partial^2 f_I}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_j \partial x_i}$. □

L'expression $d(d\omega) = 0$ peut s'écrire de plus sur façons : $d^2\omega = 0$ ou encore $(d \circ d)(\omega) = 0$, exprimant à chaque fois la même chose.

Une forme différentielle $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ est dite *fermée* si elle satisfait l'équation

$$\boxed{d\omega = 0}$$

alors que ω est dite *exacte* si elle satisfait l'équation

$$\boxed{\omega = d\eta}$$

pour une certaine forme différentielle $\eta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$.Une application directe du Théorème 6 nous permet de montrer que toute forme exacte est fermée : si $\omega = d\eta$ alors on a

$$d\omega = d(d\eta) = 0.$$

Important : La question réciproque, demandant si une forme fermée est forcément exacte est beaucoup plus difficile à aborder et c'est une question d'une importance capitale dans le domaine de la *Topologie algébrique.*

Etant donné une forme différentielle $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ on se demande si elle est exacte. Par ce qui précède on sait qu'une condition nécessaire est que ω soit fermée. Comme exemple pour fixer les idées considérons les formes différentielles sur $\mathbb{R}^3$:

$\Omega^0(\mathbb{R}^3)$	$\Omega^1(\mathbb{R}^3)$	$\Omega^2(\mathbb{R}^3)$	$\Omega^3(\mathbb{R}^3)$
f	$\alpha = \sum_{i=1}^{3} f_i dx_i$	$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} f_{ij}\ dx_i \wedge dx_j$	$\eta = f\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

(0) f ne peut pas être exacte puisqu'il y a rien avant $\Omega^0(\mathbb{R}^3)$ sur lequel d pourrait agir.
(1) Pour que α puisse être exacte, il faut que $d\alpha = 0$ et on se souvient que l'on a

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big)\ dx_i \wedge dx_j.$$

On doit donc satisfaire les trois équations

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2}$$

Si ces équations sont satisfaites, on chercher alors $g \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ telle que $dg = \alpha$. Cette équation revient à résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x_1} = f_1 \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} = f_2 \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} = f_3 \end{cases}$$

qui peut à priori avoir, ou pas, de solutions. Donnons un exemple concret.

Exemple. Considérons $\alpha = ydx + (z\cos(yz) + x)dy + y\cos(yz)dz$. Vérifions premièrement que α est bien fermée :

$$d\alpha = dy\wedge dx + dx\wedge dy + (\cos(yz) + z(-y\sin(yz))dz\wedge dy + (\cos(yz) + y(-z\sin(yz))dy\wedge dz = 0.$$

Pour voir si α est exacte on doit tenter de résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x_1} = y \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} = z\cos(yz) + x \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} = y\cos(yz) \end{cases}$$

La première équation donne $g = yx + c(y,z)$. En combinant ceci à la seconde équation on a que $\frac{\partial c}{\partial y} = z\cos(yz)$ et donc $c(y,z) = \sin(yz) + k(z)$. La troisième équation nous donne $\frac{dk}{dz} = 0$ et donc $k(z)$ est constante. Ce calcul nous permet de conclure que l'on a

$$\alpha = d(yx + \sin(yz))$$

et donc α est bien exacte.

(2) Pour que ω puisse être exacte, il faut à tout le moins que l'on ait $d\omega = 0$. On se souvient que la formule générale pour $d\omega$ est dans ce cas

$$d\omega = \sum_{1\le i<j<k\le 3} \Big(\frac{\partial f_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k}\Big)\ dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$$

ce qui se réduit tout simplement à

$$\frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} = 0.$$

Si cela est satisfait, on cherche $\alpha = \sum_{i=1}^{3} g_i dx_i$ telle que $d\alpha = \omega$ ce qui signifie que l'on cherche à résoudre le système

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_i} - \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = f_{ij} \ (1 \leq i < j \leq 3).$$

(3) Puisque $\eta = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ satisfait automatiquement $d\eta = 0$ (pourquoi ?) on passe directement à la question d'exactitude. On doit résoudre l'équation $\eta = d\omega$, avec $\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} g_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$ c'est-à-dire

$$\frac{\partial g_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x_3} = f.$$

Généralisons ce qui précède. En partant de l'espace $\mathbb{R}^n$ on construit

$$\Omega^0(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \Omega^2(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\quad d \quad} \cdots \xrightarrow{\quad d \quad} \Omega^n(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\quad d \quad} 0$$

où à chaque étape on a $d^2 = 0$. On appelle ceci le *complexe de deRham* pour $\mathbb{R}^n$. Il sera important de distinguer tous les opérateurs de dérivation extérieure dans le complexe ci-dessus, ce que nous faisons en indiquant le degré des formes différentielles auxquelles il s'applique. Pour chaque $1 \leq k \leq n$ on a

$$\Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d_{(k-1)}} \Omega^k(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d_{(k)}} \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$$

et dans $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ il y a deux sous-espaces remarquables : $\operatorname{Im} d_{(k-1)} = d\big(\Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)\big)$ ainsi que $\operatorname{Ker} d_{(k)} = \{\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n) \mid d\omega = 0\}$. Selon la terminologie introduite plus tôt le premier sous-espace est constitué des k-formes différentielles exactes, alors que le second est composé des k-formes différentielles fermées. La propriété $d^2 = 0$ démontrée précédemment peut alors être ré-interprétée de la façon suivante :

$$\boxed{\operatorname{Im} d_{(k-1)} \subseteq \operatorname{Ker} d_{(k)}}$$

On appelle $k^{ième}$ *cohomologie de deRham* de $\mathbb{R}^n$ l'espace vectoriel

$$H^k_{dR}(\mathbb{R}^n) = \operatorname{Ker} d_{(k)} / \operatorname{Im} d_{(k-1)}.$$

Exemple. Calculons explicitement $H^1_{dR}(\mathbb{R}^3)$. Soit $\alpha = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ fermée. La condition $d\alpha = 0$ signifie

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \ (1 \leq i < j \leq 3).$$

Montrons que α est exacte : il existe $g \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ telle que $\alpha = dg$. Posons en effet

$$g(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{x_1} f_1(t, x_2, x_3)dt + \int_0^{x_2} f_2(0, t, x_3)dt + \int_0^{x_3} f_3(0, 0, t)dt.$$

Par le Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral ainsi que la formule de dérivation sous l'intégrale, on obtient alors

$$\begin{aligned} dg &= \frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial g}{\partial x_3}dx_3 \\ &= \big[f_1(x_1, x_2, x_3)\big]dx_1 + \Big[f_2(0, x_2, x_3) + \int_0^{x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(t, x_2, x_3)dt\Big]dx_2 \\ &\qquad + \Big[f_3(0, 0, x_3) + \int_0^{x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(t, x_2, x_3)dt + \int_0^{x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(0, t, x_3)dt\Big]dx_3 \end{aligned}$$

En utilisant la condition $d\alpha = 0$ donnant les égalités de dérivées partielles rappelées précédemment, on a alors

$$\begin{aligned} dg &= \big[f_1(x_1, x_2, x_3)\big]dx_1 + \Big[f_2(0, x_2, x_3) + \int_0^{x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(t, x_2, x_3)dt\Big]dx_2 \\ &\qquad + \Big[f_3(0, 0, x_3) + \int_0^{x_1} \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(t, x_2, x_3)dt + \int_0^{x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(0, t, x_3)dt\Big]dx_3 \\ &= \big[f_1(x_1, x_2, x_3)\big]dx_1 + \big[f_2(0, x_2, x_3) + f_2(x_1, x_2, x_3) - f_2(0, x_2, x_3)\big]dx_2 \\ &\qquad + \big[f_3(0, 0, x_3) + f_3(x_1, x_2, x_3) - f_3(0, x_2, x_3) + f_3(0, x_2, x_3) - f_3(0, 0, x_3)\big]dx_3 \\ &= f_1(x_1, x_2, x_3)dx_1 + f_2(x_1, x_2, x_3)dx_2 + f_3(x_1, x_2, x_3)dx_3 \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\alpha = dg$ tel qu'annoncé.

En fait, cette preuve peut être assez facilement généralisée (voir TP) pour donner une preuve alternative du résultat remarquable suivant, qui confirme que pour l'espace $\mathbb{R}^n$ la cohomologie de deRham est aussi simple que possible :

THÉORÈME 7. **(Lemme de Poincaré)** *Tout élément fermé $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ est exact si $k \geq 1$.*

DMONSTRATION. On construit en effet

$$H\colon \Omega^l(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{l-1}(\mathbb{R}^n)$$

telle que :
(1) $H(0) = 0$;
(2) $\omega = H(d\omega) + d(H\omega)$
pour tout élément $\omega \in \Omega^l(\mathbb{R}^n)$ $(l \geq 1)$. On aura alors le résultat parce que si l'on suppose en outre que ω est fermée, on aura bien

$$\omega = H(d\omega) + d(H\omega) = H(0) + d(H\omega) = d(H\omega)$$

tel que voulu.
On se souvient qu'une l-forme différentielle s'écrit comme

$$\eta = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_l\leq n} \eta_{i_1 i_2\cdots i_l}\ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l}.$$

On définit alors

$$H(\eta) = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots i_l\leq n} \sum_{j=1}^{l} (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^{l-1} \eta_{i_1 i_2\cdots i_l}(tx)dt \right) x_{i_j}\ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \cdots dx_{i_l}.$$

Si $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ est une k-forme différentielle quelconque, elle s'écrit comme

$$\omega = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \omega_{i_1\cdots i_k}\ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

La preuve que $\omega = H(d\omega) + d(H\omega)$ est un calcul subtil :
Par la dérivation sous l'intégrale, on a

$$\begin{aligned} d(H\omega) &= k \sum_{1\leq i_i<\cdots<i_k\leq n} \Big(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1\cdots i_k}(tx)dt \Big) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &+ \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{n} (-1)^{j-1} \Big(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_m}(tx)dt \Big) x_{i_j} dx_m \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \ldots dx_{i_k} \end{aligned}$$

Par ailleurs puisque l'on a

$$d\omega = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_m}\ dx_m \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

on a alors

$$H(d\omega) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \sum_{m=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_m}(tx)dt \Big) x_m \ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$+ \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \Big(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_m}(tx)dt \Big) x_{i_j} dx_m \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \ldots dx_{i_k}$$

Miracle... les deux triples sommes s'annulent ! On a alors

$$\begin{aligned} d(H\omega) + H(d\omega) &= \sum_{1\le i_i<\cdots<i_k\le n} k\Big(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1\cdots i_k}(tx)dt \Big) \ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &\qquad + \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \sum_{m=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_m}(tx)dt \Big) x_m \ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{1\le i_i<\cdots<i_k\le n} \Big(\int_0^1 \frac{d}{dt}\big(t^k \omega_{i_1\cdots i_k}(tx)\big)dt \Big) \ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \qquad \text{(dérivation d'un produit)} \\ &= \sum_{1\le i_i<\cdots<i_k\le n} \omega_{i_1\cdots i_k}(x) \ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

□

Le Lemme de Poincaré nous donne donc, pour ce qui est de la cohomologie de deRham que

$$H^k_{dR}(\mathbb{R}^n) = 0$$

pour tout $k \geq 1$. Est-ce à dire que pour tout ouvert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ on aura $H^k_{dR}(\mathcal{U}) = 0$ dès que $k \geq 1$? Non... et il est utile de voir dans la preuve qui précède où les choses peuvent ne pas fonctionner lorsque l'on remplace $\mathbb{R}^n$ par un ouvert quelconque. L'exercice suivant donne les idées essentielles pour démontrer que la cohomologie de deRham peut être non-nulle dans certains cas.

Exercice. (Une forme fermée qui n'est pas exacte) On considère la 1-forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} \ dx + \frac{x}{x^2+y^2} \ dy.$$

(1) Montrez par un calcul explicite que ω est fermée.
(2) On rappelle que $F\colon (0,+\infty) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$ donnée par $F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est

injective avec dF partout injective également, si bien que l'on a $F^{-1}(x,y) = (r(x,y), \theta(x,y))$ avec

$$r(x,y) = \sqrt{x^y + y^2}$$

$$\theta(x,y) = \begin{cases} \arctan(y/x) & x > 0,\ y > 0 \\ \pi + \arctan(y/x) & x < 0 \\ 2\pi + \arctan(y/x) & x > 0,\ y < 0 \\ \pi/2 & x = 0,\ y > 0 \\ 3\pi/2 & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Montrez que sur $\mathbb{R}^2 - \{\mathbb{R}^+ \times 0\}$ on a $\omega = d\theta$.
(3) Montrez que θ ne peut être étendue de manière continue à $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
(4) Déduisez de ce qui précède qu'il n'existe pas de fonction $f\colon \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ telle que $\omega = df$.

3. Opérateurs vectoriels et formes différentielles

Une utilité première des formes différentielles est de donner une approche unifiée et relativement simple d'objets prenant leur origine en physique et aujourd'hui quelque peu vétustes en mathématiques : les opérateurs vectoriels.

Exemple. Commençons la discussion par un exemple simple, le champ gravitationnel

$$\vec{F} = -\frac{mMg}{r^3}\ \vec{r},$$

où m, M sont les masses respectives de deux corps, $\vec{r}$ exprime leur emplacement relatif dans $\mathbb{R}^3$, $r = ||\vec{r}||$ et g est une constante gravitationnelle.
Si on écrit $\vec{r} = (x,y,z)$ alors sur $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0\}$ on a

$$\vec{F} = F(x,y,z) = -\frac{mMg}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ (x,y,z).$$

Considérons alors la fonction

$$f(x,y,z) = -\frac{mMg}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}.$$

Son gradient est donné par

$$\nabla f(x,y,z) = -mMg\ \big(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\big)$$

si bien que l'on a $\nabla f(x,y,z) = F(x,y,z)$. On dit alors que le champ gravitationnel sur $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ est un *champ gradient*, c'est-à-dire qu'il peut s'exprimer comme le gradient d'une fonction définie sur le même espace.
On se souvient que sous dualité on a, en toute généralité, que :
(1) un $\vec{F}$ champ de vecteurs correspond à une 1-forme différentielle $\alpha_{\vec{F}}$;
(2) ∇ correspond à d.

Dans le cas du champ gravitationnel $\vec{F} = F(x,y,z) = -\frac{mMg}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ (x,y,z)$ et la fonction $f(x,y,z) = -mMg\ \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$ tels que $\vec{F} = \nabla f$, on a

$$df = -mMg\Big(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ dx + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ dy + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ dz\Big)$$

et la condition $\vec{F} = \nabla f$ correspond à $\alpha_{\vec{F}} = df$. C'est-à-dire que la condition "$\vec{F}$ *est un champ gradient*" correspond sous dualité à la condition "$\alpha_{\vec{F}}$ *est une* 1-*forme exacte*". On se souvient qu'une condition nécessaire pour avoir $\alpha_{\vec{F}} = df$ est que $d\alpha_{\vec{F}} = 0$ (i.e. $\alpha_{\vec{F}}$ est fermée). Il est légitime de se demander quelle est la condition correspondante sur $\vec{F}$.

La discussion faite pour le cas du champ gravitationnel pose des questions tout à fait générales sur les champs de vecteurs et leurs 1-formes différentielles correspondantes. Pour les explorer introduisons l'opérateur vectoriel suivant : le *rotationnel* d'un champ de vecteurs. : si $F = (f_1, f_2, f_3)$ exprime un champ de vecteurs $\vec{F}$ de $\mathbb{R}^3$, on pose

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}.$$

Autrement dit, on a défini

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \Big(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big).$$

Ceci devrait rappeler quelque chose au lecteur ou à la lectrice attentifs... En effet, pour $\alpha_{\vec{F}} = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ on a obtenu

$$d\alpha_{\vec{F}} = \Big(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big)\ dx \wedge dy + \Big(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\Big)\ dx \wedge dz + \Big(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\Big)\ dy \wedge dz.$$

En appliquant l'opérateur de Hodge $*\colon \Omega^2(\mathbb{R}^3) \to \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ on obtient

$$*d\alpha_{\vec{F}} = \Big(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\Big)\ dx + \Big(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\Big)\ dy + \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big)\ dz$$

et alors la condition $d\alpha_{\vec{F}} = 0$ correspond sous dualité à la condition $\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = 0$. Nous avons donc établi de façon indirecte mais très économe que :

Une condition nécessaire pour que $\vec{F}$ soit un champ gradient est que $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$.

En Physique, un champ de vecteurs $\vec{F}$ tel que $\nabla \times \vec{F} = 0$ est dit *irrotationnel*. On voit alors que le fait qu'un champ gradient soit toujours irrotationnel, écrit en équation comme

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \nabla \times \nabla f = 0$$

provient donc du fait que $d^2 = 0$ au niveau des formes différentielles : en effet, il est facile de vérifier que l'on a $\nabla = \sharp \circ d$ et $\operatorname{rot} = \sharp \circ * \circ d \circ \sharp$ si bien que l'on obtient bien

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = (\sharp \circ * \circ d \circ \underbrace{\sharp)(\sharp}_{\mathrm{Id}} \circ d)(f) = \sharp \circ * \circ d^2(f) = 0.$$

Un autre opérateur vectoriel fréquemment utilisé est *la divergence* : comme précédemment, si $F = (f_1, f_2, f_3)$ exprime un champ de vecteurs $\vec{F}$ de $\mathbb{R}^3$, on pose

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

Cet opérateur est interprété de la façon suivante dans le contexte des formes différentielles :

$$\vec{F} \xmapsto{\ \sharp\ } \alpha_{\vec{F}} \xmapsto{\ *\ } *\alpha_{\vec{F}} \xmapsto{\ d\ } d * \alpha_{\vec{F}} \xmapsto{\ *\ } \operatorname{div} \vec{F}.$$

En Physique, un champ de vecteurs $\vec{F}$ tel que $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ est dit *incompressible*. Le fait remarquable voulant qu'un champ de vecteurs s'exprimant comme le rotationnel d'un autre champ de vecteurs soit incompressible, exprimé en équation par

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0,$$

découle selon notre formalisme de formes différentielles de la propritété $d^2 = 0$. En effet, on a

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = (* \circ d \circ \underbrace{* \circ \sharp)(\sharp \circ *}_{\pm \mathrm{Id}} \circ\, d \circ \sharp)(\vec{F}) = \pm * \circ\, d^2(\omega_{\vec{F}}) = 0.$$

A partir de ce qui a été développé lors de ce chapitre, la plupart des identités du calcul vectoriel utilisées dans divers domaines de la Physique peuvent être facilement dérivées à partir du formalisme des formes différentielles. Le gain n'est pas tant calculatoire, mais plutôt d'avoir découvert des principes unificateurs (dualité, $d^2 = 0$, etc) permettant de mieux comprendre ces notions classiques. Le lecteur, la lectrice pourront s'amuser à dériver les identités suivantes selon la méthode détaillée ci-dessus :

$$
\begin{gathered}
\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f \\
\nabla (fg) = f \nabla g + g \nabla f \\
\nabla \cdot (f\vec{F}) = f \nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f \\
\nabla \times (f\vec{F}) = f \nabla \times \vec{F} + \nabla f \times \vec{F} \\
\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \\
\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})
\end{gathered}
$$

pour f, g des fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ et $\vec{F},\ \vec{G}$ des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$.

Chapitre 3

Applications induites sur les formes différentielles

1. Déterminant et algèbre multilinéaire

On a introduit au cours d'algèbre linéaire la notion de *déterminant* d'une matrice $n \times n$ A :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

et l'approche la plus souvent utilisée est récursive, appelée *formule de Laplace* selon la $j^{\text{ème}}$ colonne :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{i,j},$$

où $A_{i,j}$ dénote la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue à partir de A en enlevant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. Pour les fins de ce cours, il est beaucoup plus avantageux d'introduire le déterminant selon une approche axiomatique.

Proposition 1.1. *Il existe une fonction unique, la fonction déterminant* det, *qui assigne à chaque ensemble ordonné* $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \cdots, \mathbf{a_n}\}$ *de vecteurs dans* $\mathbb{R}^n$ *le nombre réel* $\det(\mathbf{a_1}\ \mathbf{a_2}\ \cdots\ \mathbf{a_n})$ *satisfaisant les axiomes suivants :*

(i) *Multilinéarité :*

$$\det(\mathbf{a_1}\ \mathbf{a_2}\ \cdots \alpha\mathbf{a_i} + \beta\mathbf{b_i}\ \cdots \mathbf{a_n}) = \alpha \det(\mathbf{a_1}\ \mathbf{a_2}\ \cdots\ \mathbf{a_i}\ \cdots \mathbf{a_n}) + \beta \det(\mathbf{a_1}\ \mathbf{a_2}\ \cdots\ \mathbf{b_i}\ \cdots \mathbf{a_n}).$$

(ii) *Antisymétrie :*

$$\det(\mathbf{a_1}\ \mathbf{a_2}\ \cdots\ \mathbf{a_i}\ \cdots\ \mathbf{a_j}\ \cdots\ \mathbf{a_n}) = -\det(\mathbf{a_1}\ \mathbf{a_2}\ \cdots\ \mathbf{a_j}\ \cdots\ \mathbf{a_i}\ \cdots\ \mathbf{a_n})$$

(iii) *Normalisation : Pour la base canonique* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \cdots, \mathbf{e_n}\}$*, on a*

$$\det(\mathbf{e_1}\ \mathbf{e_2}\ \cdots\ \mathbf{e_n}) = 1.$$

L'axiome (iii) permet tout simplement de fixer à 1 le déterminant de la matrice identité $I_{n\times n}$. Les deux autres nous disent comment le déterminant change lorsque l'on effectue les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice A. On rappelle qu'une telle opération élémentaire E est d'un des trois types suivants.
Type I : additionner à une colonne un multiple d'une colonne distincte.
Type II : multiplier une colonne par une constante non-nulle c.
Type III : échanger deux colonnes quelconques.

Lemme 1.2. *Si E est une opération élémentaire sur les colonnes de A, alors on a* $\det E(A) = \kappa \det A$*, où κ est donné par*

$$\kappa = \begin{cases} 1 & \textit{si } E \textit{ est de type I} \\ c & \textit{si } E \textit{ est de type II} \\ -1 & \textit{si } E \textit{ est de type III} \end{cases}$$

Dmonstration. L'effet d'un opération de type II est clair étant donné l'axiome (i), alors que l'effet pour le type III découle directement de l'axiome (ii). Dans le cas de celui d'une opération de type I on a

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{a_1}\ \mathbf{a_2}\ \cdots \mathbf{a_i} + c\mathbf{a_k}\ \cdots \mathbf{a_n}) &= \det(\mathbf{a_1}\ \mathbf{a_2}\ \cdots \mathbf{a_i} \cdots \mathbf{a_n}) + c\underbrace{\det(\mathbf{a_1}\ \mathbf{a_2}\ \cdots\ \mathbf{a_k}\ \cdots \mathbf{a_n})}_{0} \\ &= \det(\mathbf{a_1}\ \mathbf{a_2}\ \cdots \mathbf{a_i} \cdots \mathbf{a_n})\end{aligned}$$

où les égalités découlent des axiomes (i) et (ii) en utilisant le fait (crucial) que $\mathbf{i} \neq \mathbf{k}$. □

Théorème 8. **(Unicité du déterminant)** *Les axiomes* (i)-(iii) *caractérisent de manière unique la fonction déterminant pour les matrices $n \times n$.*

Dmonstration. Soient det et det′ deux fonctions satisfaisant les axiomes (i)-(iii). On distingue deux cas : si A est une matrice inversible ou bien si elle ne l'est pas. Dans second scénario, on a par de l'algèbre linéaire élémentaire que les colonnes de A, $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \cdots, \mathbf{a_n}\}$, constituent un ensemble linéairement dépendant. Supposons sans perte de généralité que l'on a

$$\mathbf{a_1} = \alpha_2\mathbf{a_2} + \alpha_3\mathbf{a_3} + \cdots + \alpha_n\mathbf{a_n}.$$

On a alors par les axiomes (i) et (ii) que

$$\det A = \det(\mathbf{a_1}\ \mathbf{a_2}\ \cdots\ \mathbf{a_n}) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \det(\mathbf{a_i}\ \mathbf{a_2}\ \cdots\ \mathbf{a_n}) = 0$$

et pour exactement les mêmes raisons $\det' A = 0$, ce qui établit le résultat.
L'autre possibilité est que A soit inversible, auquel cas on sait par un premier cours d'algèbre linéaire que A est équivalente à la matrice identié $I_{n\times n}$ après avoir effectué une suite d'opérations élémentaires $E_1, E_2, \cdots, E_m$. Par le lemme précédent, pour chaque $1 \leq k \leq m$ l'effet de E_k est de changer le déterminant par un réel κ_k et donc la axiome (iii) donne à la fois pour $\det A$ et $\det' A$:

$$1 = \det I_{n\times n} = \det(E_m E_{m-1} \cdots E_1(A)) = \kappa_m \kappa_{m-1} \cdots \kappa_1 \det A$$
$$1 = \det' I_{n\times n} = \det'(E_m E_{m-1} \cdots E_1(A)) = \kappa_m \kappa_{m-1} \cdots \kappa_1 \det' A$$

ce qui permet de conclure que l'on a bien $\det' A = \det A$. □

Un des avantages d'une approche axiomatique du déterminant est d'utiliser l'unicité obtenue à partir des axiomes (i), (ii) et (iii) pour démontrer indirectement que si une expression, par exemple

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{i,j}$$

apparaissant dans la formule de Laplace, est multilinéaire, antisymétrique et de valeur 1 sur la base canonique ordonnée, alors il s'agit d'une expression du déterminant. Par contre, comme toute théorie axiomatique en mathématique nous devons egalement montrer l'*existance* du déterminant, ce que nous n'avons pas encore fait ! Ceci est donné par le résultat suivant.

THÉORÈME 9. **(Existance de la fonction déterminant)** *Toute matrice A de taille $n \times n$ possède un déterminant* $\det A$ *qui est bien défini. On peut l'exprimer comme*

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

pour la matrice $A = \big(a_{ij}\big)$.

DMONSTRATION. Soit $f(A) = f(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \cdots, \mathbf{a_n}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ et montrons que f satisfait les axiomes (i)-(iii). Pour (i) on remarque que dans la somme définissant $f(A)$, pour chaque permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, chaque terme $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

contient exactement un élément de chaque ligne et chaque colonne de A, donc pour chaque $1 \leq i \leq n$ en multipliant la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par α on aura

$$f(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \cdots, \alpha\mathbf{a_i}, \cdots, \mathbf{a_n}) = \alpha\ f(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \cdots, \mathbf{a_i}, \cdots, \mathbf{a_n})$$

et de même on aura

$$f(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \cdots, \mathbf{a_i} + \mathbf{b_i}, \cdots, \mathbf{a_n}) = f(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \cdots, \mathbf{a_i}, \cdots, \mathbf{a_n}) + f(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \cdots, \mathbf{b_i}, \cdots, \mathbf{a_n}).$$

Dans le cas de l'axiome (ii), soit τ la transposition de i et j dans $\{1, 2, \cdots, n\}$. On a alors

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \cdots, \mathbf{a_j}, \cdots, \mathbf{a_i}, \cdots, \mathbf{a_n}) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\tau\sigma(1)} a_{2\tau\sigma(2)} \cdots a_{n\tau\sigma(n)} \\
&= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\tau\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \cdots a_{n\rho(n)} \quad (\text{substituer } \rho = \tau\sigma) \\
&= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\tau) \operatorname{sign}(\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \cdots a_{n\rho(n)} \quad (\text{car } \operatorname{sign}(\tau\rho) = \operatorname{sign}(\tau)\operatorname{sign}(\rho)) \\
&= -\sum_{\rho \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \cdots a_{n\rho(n)} \quad (\text{car } \operatorname{sign}(\tau) = -1) \\
&= -f(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \cdots, \mathbf{a_i}, \cdots, \mathbf{a_j}, \cdots, \mathbf{a_n}) \quad (\text{définition de } f(A))
\end{aligned}$$

Finalement (iii) est vraie puisque dans le cas où $A = I_{n \times n}$ on a

$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \mathrm{Id}_{\mathfrak{S}_n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

si bien que $f(I_{n \times n}) = 1$ comme voulu. $\square$

Nous concluons cette discussion d'algèbre linéaire par un point de vue plus géométrique sur le déterminant. Etant donné une matrice A de taille $n \times n$ on peut la voir comme une application linéaire $A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Le *cube unité* $[0, 1]^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est un parallélépipède ayant pour base la base canonique $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ qui a volume égal à 1 et son image $A([0, 1]^n)$ est un parallélépipède de base $\{Ae_1, Ae_2, \cdots, Ae_n\}$, les colonnes de la matrice A. On a alors (pouquoi ?) la relation suivante entre les volumes : $\operatorname{vol} A([0, 1]^n) = |\det A| \operatorname{vol}[0, 1]^n$. Cette formule peut être généralisée pour tout ensemble mesurable [1] X dans $\mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{vol} A(X) = |\det a| \operatorname{vol} X,$$

1. La définition précise ne sera pas importante ici, il nous importera simplement de savoir que les sous-ensembles ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$ sont mesurables.

et donc on peut interpréter géométriquement $|detA|$ comme un facteur de changement de volume lorsque l'on applique la transformation linéaire A.

2. Effet d'une application sur les formes différentielles

Soit $\alpha = \sum_I f_I dy_I$ une k-forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^m$. Ceci suppose que l'on a des coordonnées $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ sur $\mathbb{R}^m$ et supposons que l'on a des coordonnées sur $\mathbb{R}^n$ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ telles que

$$(*) \qquad \begin{cases} y_1 = \phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 = \phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = \phi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

où $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$ sont des fonctions lisses de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$. On écrit le système (*) de façon plus simple : $y = \phi(x)$. Nous voulons décrire l'effet de $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sur $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^m)$

DÉFINITION 2.1. *On appelle tiré-en-arrière de α par ϕ la forme différentielle*

$$\phi^*\alpha = \sum_I \big(\phi^* f_I\big)\big(\phi^* dy_I\big),$$

où l'on a $\phi^* f_I = f_I \circ \phi$ ainsi que $\phi^* dy_I = \phi^*(dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}) = d\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{i_k}$

Il importe de remarquer que le tiré-en-arrière *renverse les flèches* : étant donné $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on a $\phi^*\colon \Omega^k(\mathbb{R}^m) \to \Omega^k(\mathbb{R}^n)$. Etant donné $\alpha = \sum_I f_I dy_I$ un élément de $\Omega^k(\mathbb{R}^m)$ on sait que la k-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ $\phi^*\alpha$ s'écrira comme

$$\phi^*\alpha = \sum_J g_J dx_J$$

et nous verrons plus loin le lien explicite entre les applications g_J, f_I et ϕ. Mais avant, nous explorons quelques propriétés de ϕ^*. On peut bien sûr adapter la notion de tiré-en-arrière à des applications définies sur des sous-ensembles d'espaces euclidiens [2]. Ainsi étant donné $\phi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ et $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{V})$ on obtient alors $\phi^*\alpha \in \Omega^k(\mathcal{U})$.

2. On supposera règle générale que ces sous-ensembles sont ouverts pour pouvoir faire aisément de l'analyse mathématique sur ces ensembles.

Exemple. Soit $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_1x_3 \\ x_2x_3 \end{pmatrix}.$$

Soient alors

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1,x_2,x_3) \\ \phi_2(x_1,x_2,x_3) \\ \phi_3(x_1,x_2,x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_1x_3 \\ x_2x_3 \end{pmatrix}.$$

On a alors pour les 1-formes différentielles

$$\begin{aligned}
\phi^*dy_1 = d\phi_1 &= \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3}dx_3 = x_2dx_1 + x_1dx_2 \\
\phi^*dy_2 = d\phi_2 &= \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\phi_2}{\partial x_3}dx_3 = x_3dx_1 + x_1dx_3 \\
\phi^*dy_3 = d\phi_3 &= \frac{\partial\phi_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\phi_3}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\phi_3}{\partial x_3}dx_3 = x_3dx_2 + x_2dx_3
\end{aligned}$$

Pour ce qui est des 2-formes différentielles

$$\begin{aligned}
\phi^*(dy_1 \wedge dy_2) = d\phi_1 \wedge d\phi_2 &= (x_2dx_1 + x_1dx_2) \wedge (x_3dx_1 + x_1dx_3) \\
&= -x_1x_3\ dx_1 \wedge dx_2 + x_1x_2\ dx_1 \wedge dx_3 + x_1^2\ dx_1 \wedge dx_3
\end{aligned}$$

THÉORÈME 2.2. *L'applications ϕ^* est linéaire : $\phi^*(a\alpha + b\beta) = a\phi^*\alpha + b\phi^*\beta$.*

DMONSTRATION. Soient $\alpha = \sum_I f_I dy_I$ et $\beta = \sum_I g_I dy_I$ deux éléments de $\Omega^k(\mathbb{R}^m)$, si bien que $\phi^*\alpha = \sum_I \phi^* f_I\ \phi^* dy_I$ et $\phi^*\beta = \sum_I \phi^* g_I\ \phi^* dy_I$. Alors on a

$$a\alpha + b\beta = \sum_I (af_I + bg_i)dy_I$$

et donc

$$\phi^*(a\alpha + b\beta) = \sum_I \phi^*(af_I + bg_I)\ \phi^*dy_I.$$

Comme $\phi^*(af_I + bg_i)(x) = (af_I + bg_I)(\phi(x)) = af_I(\phi(x)) + bg_I(\phi(x)) = a\phi^* f_I(x) + b\phi^* g_I(x)$ on a bien le résultat voulu. $\square$

THÉORÈME 2.3. *L'application ϕ^* satisfait l'équation $\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*\alpha \wedge \phi^*\beta$.*

Dmonstration. Soient $\alpha = \sum_I f_I dy_I \in \Omega^k(\mathcal{V})$ et $\beta = \sum_J g_J dy_J \in \Omega^l(\mathcal{V})$ deux formes différentielles sur $\mathcal{V}$. Alors on a que

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{I,J} f_I g_J \; dy_I \wedge dy_J$$

et, en appliquant la définition du tiré-en-arrière

$$\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \sum_{I,J} \phi^*(f_I g_J) \; \phi^*(dy_I \wedge dy_J).$$

Mais puisque l'on a

$$\phi^*(f_I g_J)(x) = (f_I g_J)(\phi(x)) = f_I(\phi(x)) g_J(\phi(x)) = \phi^* f_I(x) \phi^* g_J(x) = (\phi^* f_I \phi^* g_J)(x)$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \phi^*(dy_I \wedge dy_J) &= \phi^*(dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k} \wedge dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_l}) \\ &= d\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{i_k} \wedge d\phi_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{j_l} = \phi^*(dy_I) \wedge \phi^*(dy_J), \end{aligned}$$

on obtient bien que

$$\begin{aligned} \phi^*(\alpha \wedge \beta) &= \sum_{I,J} \phi^* f_I \phi^* g_J \phi^*(dy_I) \wedge \phi^*(dy_J) \\ &= \big(\sum_I \phi^* f_I \phi^*(dy_I) \big) \wedge \big(\sum_J \phi^* g_J \phi^*(dy_J) \big) \\ &= \phi^* \alpha \wedge \phi^* \beta. \end{aligned}$$

□

Il est utile d'introduire une autre façon de calculer le tiré-en-arrière d'une k-forme différentielle. Cette approche est développée dans le livre de Bachman [**Bac**] au début du chapitre 7. Nous laissons le soin au lecteur, à la lectrice, de démontrer qu'il s'agit bien d'une définition équivalente à celle donnée précédemment. Etant donné $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ avec différentielle $d\phi\colon T\mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^m$ et $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^m)$ on a

$$\phi^* \omega = \omega \circ d\phi$$

au sens où en chaque $p \in \mathbb{R}^n$ on a

$$(\phi^*\omega)_p \Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \Big)_p, \ldots, \Big(\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \Big)_p \Big) = \omega_{\phi(p)} \Big((d\phi)_p \Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \Big)_p, \ldots, \Big(\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \Big)_p \Big) \Big).$$

Exemple. Calculons le tiré-en-arrière sous $\phi(x_1, x_2) = (x_1+x_2, x_1-x_2, x_1x_2)$ de la 1-forme différentielle $\omega = ydx + zdy + xdz$ selon les deux façons.

(i) Selon la définition on a

$$\begin{aligned}\phi^*\omega &= (x_1 - x_2)\big[1dx_1 + 1dx_2\big] + x_1x_2\big[1dx_1 - 1dx_2\big] + (x_1 + x_2)\big[x_2dx_1 + x_1dx_2\big] \\ &= (x_1 - x_2 + 2x_1x_2 + x_2^2)dx_1 + (x_1 - x_2 + x_1^2)dx_2\end{aligned}$$

Remarquons alors que l'on a par dualité

$$\begin{aligned}\phi^*\omega\big(\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)\big) &= x_1 - x_2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \\ \phi^*\omega\big(\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)\big) &= x_1 - x_2 + x_1^2\end{aligned}$$

(ii) Selon la formule $\phi^*\omega = \omega \circ d\phi$, on a tout d'abord par un calcul facile de dérivées partielles

$$d\phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite on a

$$\begin{aligned}\phi^*\omega\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)\Big) &= \omega\Big(d\phi\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)\Big)\Big) \\ &= \Big\langle \omega, d\phi\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)\Big)\Big\rangle \\ &= (x_1 - x_2) + x_1x_2 + (x_1 + x_2)x_2 \\ &= x_1 - x_2 + 2x_1x_2 + x_2^2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\phi^*\omega\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)\Big) &= \omega\Big(d\phi\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)\Big)\Big) \\ &= \Big\langle \omega, d\phi\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)\Big)\Big\rangle \\ &= (x_1 - x_2) - x_1x_2 + (x_1 + x_2)x_1 \\ &= x_1 - x_2 + x_1^2\end{aligned}$$

Nous avons bien sûr obtenu la même réponse avec les deux méthodes.

Nous poursuivons maintenant l'exploration des propriétés du tiré-en-arrière.

THÉORÈME 2.4. *L'application ϕ^* est functoriel, c'est-à-dire qu'elle est compatible avec la composition d'applications :*

$$\big(\psi\circ\phi\big)^*(\alpha) = \big(\phi^*\circ\psi^*\big)(\alpha).$$

DMONSTRATION. On considère premièrement le cas des 0-formes différentielles, c'est-à-dire les fonctions. On a

$$\big[(\psi^*\circ\phi^*)f\big](x) = \big[\psi^*(\phi^* f)\big](x) = \psi^* f(\phi(x)) = f(\psi(\phi(x))) = \big[f\circ\psi\circ\phi\big](x) = \big[(\psi\circ\phi)^* f\big](x)$$

et donc on a bien $\big(\psi\circ\phi\big)^* f = \big(\phi^*\circ\psi^*\big)f$.
En vertu du théorème précédent démontrant la compatibilité du tiré-en-arrière avec le produit extérieur, on aura le résultat général une fois que sera établi celui des 1-formes différentielles. Soient donc

$$\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n \xrightarrow{\phi} \mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^m \xrightarrow{\psi} \mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^k$$

ainsi que $\alpha = dz_i$ pour un certain $1\le i\le k$ une 1-forme sur $\mathcal{W}$. Alors on a

$$\psi^*\alpha = d\psi_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial\psi_i}{\partial y_j}dy_j$$

et on obtient donc

$$\begin{aligned}\phi^*\big(\psi^*\alpha\big) &= \phi^*\Big(\sum_{j=1}^m \frac{\partial\psi_i}{\partial y_j}dy_j\Big) = \sum_{j=1}^m \phi^*\Big(\frac{\partial\psi_i}{\partial y_j}\Big)\phi^* dy_j = \sum_{j=1}^m \phi^*\Big(\frac{\partial\psi_i}{\partial y_j}\Big)d\phi_j\\ &= \sum_{j=1}^m \phi^*\Big(\frac{\partial\psi_i}{\partial y_j}\Big)\sum_{l=1}^n \frac{\partial\phi_j}{\partial x_l}dx_l = \sum_{l=1}^n\Big[\sum_{j=1}^m \phi^*\Big(\frac{\partial\psi_i}{\partial y_j}\Big)\frac{\partial\phi_j}{\partial x_l}\Big]dx_l\end{aligned}$$

Mais par la règle de dérivation en chaîne on a

$$\sum_{j=1}^m \phi^*\Big(\frac{\partial\psi_i}{\partial y_j}\Big)\frac{\partial\phi_j}{\partial x_l} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial\psi_i}{\partial y_j}\circ\phi\ \frac{\partial\phi_j}{\partial x_l} = \frac{\partial(\psi_i\circ\phi)}{\partial x_l}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}(\phi^*\circ\psi^*)\ \alpha = \phi^*(\psi^*\alpha) &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial(\phi^*\psi_i)}{\partial x_l}dx_l\\ &= d\big(\phi^*\psi_i\big) = d\big((\psi\circ\phi)_i\big)\\ &= \big(\psi\circ\phi\big)^* dz_i = \big(\psi\circ\phi\big)^*\alpha,\end{aligned}$$

où il est utilie de préciser que l'avant-dernière égalité découle de la définition du tiré-en-arrière sur une 1-forme.

□

THÉORÈME 2.5. *L'application ϕ^* est compatible avec la dérivation extérieure au sens où l'on a $\phi^* \circ d = d \circ \phi^*$.*

Une autre façon de dire la même chose : si on considère l'application $\phi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Omega^k(\mathcal{V}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\phi^*"'] & \Omega^{k+1}(\mathcal{V}) \arrow[d, "\phi^*"] \\
\Omega^k(\mathcal{U}) \arrow[r, "d"] & \Omega^{k+1}(\mathcal{U})
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

DMONSTRATION. On commence par le cas des fonctions. Pour $f \in \Omega^0(\mathcal{V})$, on a

$$\begin{aligned}
\phi^* df &= \phi^*\Big(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} \phi^*\Big(\frac{\partial f}{\partial y_i}\Big) d\phi_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \phi^*\Big(\frac{\partial f}{\partial y_i}\Big) \ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} dx_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \phi^*\Big(\frac{\partial f}{\partial y_i}\Big) \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}}_{\frac{\partial (f\circ\phi)}{\partial x_j}} dx_j \\
&= d\phi^* f
\end{aligned}$$

Dans le cas d'une k forme $\alpha = \sum_I f_I dy_I$, on a $d\alpha = \sum_I df_I \wedge dy_I$ si bien que

$$\begin{aligned}
\phi^* d\alpha &= \sum_I \phi^*\big(df_I \wedge dy_I\big) && (\phi^* \text{ linéaire}) \\
&= \sum_I \phi^* df_I \wedge \phi^* dy_I && (\text{car } \phi^* \text{ multiplicative}) \\
&= \sum_I d\big(\phi^* f_I\big) \ d\phi_{i_1} \wedge d\phi_{i_2} \wedge \cdots \wedge d\phi_{i_k} && (\text{par ci-dessus}).
\end{aligned}$$

Par ailleurs pour $d\phi^*\alpha$, en utilisant la règle de Leibniz on a

$$\begin{aligned}
d\phi^*\alpha &= \sum_I d\big((\phi^* f_I)(\phi^* dy_I)\big) \qquad \text{(linéarité de } d\text{)} \\
&= \sum_I d\big((\phi^* f_I) d\phi_{i_1} \wedge d\phi_{i_2} \wedge \dots d\phi_{i_k}\big) \\
&= \sum_I d\big(\phi^* f_I\big) d\phi_{i_1} \wedge d\phi_{i_2} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_k} + \sum_I \big(\phi^* f_I\big) \underbrace{d\big(d\phi_{i_1} \wedge d\phi_{i_2} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_k}\big)}_{\text{rappel : } d^2=0} \\
&= \phi^* d\alpha
\end{aligned}$$

tel que demandé. □

Nous avons donc la situation suivante pour $\phi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$: dans chaque diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{k-1}(\mathcal{V}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\phi^*"'] & \Omega^k(\mathcal{V}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\phi^*"'] & \Omega^{k+1}(\mathcal{V}) \arrow[d, "\phi^*"] \\
\Omega^{k-1}(\mathcal{U}) \arrow[r, "d"] & \Omega^k(\mathcal{U}) \arrow[r, "d"] & \Omega^{k+1}(\mathcal{U})
\end{tikzcd}$$

si $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{V})$ est fermée alors $\phi^*\alpha \in \Omega^k(\mathcal{U})$ est également fermée car

$$d(\phi^*\alpha) = \phi^*(d\alpha) = \phi^*(0) = 0.$$

De même sir $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{V})$ est exacte, on on aura $\phi^*\alpha$ exacte : en supposant que $\alpha = d\eta$ on a

$$\phi^*\alpha = \phi^*(d\eta) = d(\phi^*\eta).$$

Ceci permet de considérer l'application *induite* par ϕ^* en cohomologie de de Rham :

$$\phi^*\colon H^k_{\mathrm{dR}}(\mathcal{V}) \to H^k_{\mathrm{dR}}(\mathcal{U}).$$

Proposition 2.6. *Si $\phi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est un difféomorphisme, alors $\phi^*\colon H^k_{dR}(\mathcal{V}) \to H^k_{dR}(\mathcal{U})$ est un isomorphisme.*

Dmonstration. On a ϕ inversible et $\phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{Id}_\mathcal{V}$ ainsi que $\phi^{-1} \circ \phi = \mathrm{Id}_\mathcal{U}$. Comme les applications $(\mathrm{Id}_\mathcal{V})^*\colon \Omega^k(\mathcal{V}) \to \Omega^k(\mathcal{V})$ et $(\mathrm{Id}_\mathcal{U})^*\colon \Omega^k(\mathcal{U}) \to \Omega^k(\mathcal{U})$ sont chacune application identité respectivement sur $\Omega^k(\mathcal{V})$ et $\Omega^k(\mathcal{U})$, la naturalité donne

$$(\mathrm{Id}_\mathcal{V})^* = (\phi \circ \phi^{-1})^* = (\phi^{-1})^* \circ \phi^* \;\Rightarrow\; \phi^* \text{ injective}$$

ainsi que

$$(\mathrm{Id}_{\mathcal{U}})^* = (\phi^{-1} \circ \phi)^* = \phi^* \circ (\phi^{-1})^* \;\Rightarrow\; \phi^* \text{ surjective}$$

et donc ϕ^* est bien isomorphisme. $\square$

Avec ces outils nous pouvons retourner au Lemme de Poincaré. Considérons les applications $\pi(x,t) = x$ et $s(x) = (x,0)$ dans

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \arrow[d, shift right, "\pi"'] \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, shift right, "s"'] \end{tikzcd}$$

qui induisent au niveau des k-formes différentielles les applications

$$\begin{tikzcd} \Omega^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \arrow[d, shift right, "s^*"'] \\ \Omega^k(\mathbb{R}^n). \arrow[u, shift right, "\pi^*"'] \end{tikzcd}$$

Alors par naturalité de l'application induite la relation $\pi \circ s = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ donne directement $s^* \circ \pi^* = \mathrm{Id}_{\Omega^k(\mathbb{R}^{n+1})}$. Mais malheureusement on a $s \circ \pi \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$ et même $\pi^* \circ s^* \neq \mathrm{Id}_{\Omega^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})}$. Analysons donc plus en détail $\Omega^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$: chaque élément de cet espace vectoriel est obtenu à partir de formes de deux types :

(I) $\pi^*\alpha f(x,t)$ pour $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$;

(II) $\pi^*\beta \wedge f(x,t)dt$ pour $\beta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$.

On définit alors $H \colon \Omega^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ par

$$H(\pi^*\alpha f(x,t)) = 0$$

$$H(\pi^*\beta \wedge f(x,t)dt) = \pi^*\beta \int_0^t f(x,\tau)d\tau$$

On appelle l'opérateur H *intégration le long de la fibre*. On peut alors montrer que pour les formes $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ de type (I) et (II) on a la relation

$$\big(\mathrm{Id}^*_{\Omega^k(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})} - \pi^* \circ s^*\big)(\omega) = \pm\big(d \circ H - H \circ d\big)(\omega).$$

Ceci implique directement qu'au niveau de $H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ l'application $\pi^* \circ s^*$ est un isomorphisme et donc on a bien le résultat annoncé dans le Lemme de Poincaré

$$H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \simeq H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^n).$$

De manière totalement similaire on montre que $H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^n \times [0,1]) \simeq H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^n)$.

Cette preuve et la functorialité permet de dériver une autre propriété importante de la cohomologie de de Rham. Mais avant une définition :

DÉFINITION 2.7. *Deux applications lisses $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ et $g\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ sont dites homotopes s'il existe une application lisse $H\colon \mathcal{U} \times [0,1] \to \mathcal{V}$ telle que*

$$H(x,0) = f(x) \ (\forall x \in \mathcal{U})$$
$$H(x,1) = g(x) \ (\forall x \in \mathcal{U})$$

On appelle H une *homotopie* entre f et g. L'idée intuitive derrière cette notion est que $H(\cdot, t)$ interpole de manière lisse entre f et g lorsque t varie de 0 à 1

COROLLAIRE 2.8. *Si $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est homotope à $g\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ alors, au niveau de la cohomologie de de Rham, on a $f^* = g^*$.*

DMONSTRATION. Soient $s_0\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U} \times [0,1]$ donnée par $s_0(x) = (x,0)$ ainsi que $s_1\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U} \times [0,1]$ donnée par $s_1(x) = (x,1)$. Si H est une homotopie entre f et g on a $f = H \circ s_0$ et $g = H \circ s_1$ et donc, par naturalité,

$$f^* = (H \circ s_0)^* = s_0^* \circ H^*$$
$$g^* = (H \circ s_1)^* = s_1^* \circ H^*.$$

Au niveau de la cohomologie de de Rham, comme s_0^* et s_1^* inversent toutes deux l'application $\pi^*\colon H^k_{\mathrm{dR}}(\mathcal{U} \times [0,1]) \to H^k_{\mathrm{dR}}(\mathcal{U})$, selon un argument essentiellement identique à celui développé lors de la preuve du théorème précédent, on a $s_0^* = s_1^*$ et donc $f^* = g^*$ en cohomologie tel que demandé.

$\square$

Concluons le chapitre par le calcul explicite de ϕ^*.

Cas I : 1-formes

Si on a $\alpha = \sum_{i=1}^{m} f_i dy_i$ alors $\phi^*\alpha = \sum_{i=1}^{m} \phi^* f_i d\phi_i$ peut s'écrire au long comme

$$\begin{aligned}
\phi^*\alpha &= \sum_{i=1}^{m} \phi^* f_i \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} dx_j \Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \phi^* f_i \ \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} dx_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} g_j dx_j
\end{aligned}$$

où l'on a

$$\boxed{g_j = \sum_{i=1}^{m} \phi^* f_i \ \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}}$$

Cas II : 2-formes

Soit $\alpha = \sum_{1 \leq i < j \leq m} f_{ij} \ dy_i \wedge dy_j$ une 2-forme différentielle quelconque, si bien que

$$\phi^*\alpha = \sum_{1 \leq i < j \leq m} \phi^* f_{ij} \ d\phi_i \wedge d\phi_j .$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
d\phi_i \wedge d\phi_j &= \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} dx_k \Big) \wedge \Big(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_l} dx_l \Big) \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_l} \ dx_k \wedge dx_l \\
&= \sum_{1 \leq k < l \leq n} \Big(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_l} - \frac{\partial \phi_i}{\partial x_l} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_k} \Big) \ dx_k \wedge dx_l
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\phi^*\alpha &= \sum_{1\le i<j\le m} \phi^* f_{ij} \sum_{1\le k<l\le n} \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_i}{\partial x_k} & \frac{\partial\phi_i}{\partial x_l} \\ \frac{\partial\phi_j}{\partial x_k} & \frac{\partial\phi_j}{\partial x_l} \end{vmatrix} dx_l \wedge dx_l \\ &= \sum_{1\le k<l\le n} g_{kl}\; dx_k \wedge dx_l\end{aligned}$$

où l'on a

$$\boxed{g_{kl} = \sum_{1\le i<j\le m} \phi^* f_{ij} \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_i}{\partial x_k} & \frac{\partial\phi_i}{\partial x_l} \\ \frac{\partial\phi_j}{\partial x_k} & \frac{\partial\phi_j}{\partial x_l} \end{vmatrix}}$$

Chapitre 4

Intégration des formes différentielles

L'intégration est développée en deux étapes. Nous analysons premièrement le cas des 1-formes différentielles en détail, après quoi on pourra généraliser la construction au cas général des k-formes différentielles.

1. Intégration des 1-formes différentielles

On se souvient que $\Omega^1(\mathbb{R})$ est formé déléments de la forme $g(t)dt$, pour une fonction lisse g déterminant complètement la 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}$. Etant donné une courbe lisse $c\colon [a,b] \to \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ on a vu comment construire $c^*\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R})$ à partir de $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{U})$.

DÉFINITION 1.1. *Etant donné $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ et une courbe lisse $c\colon [a,b] \to \mathcal{U}$, l'intégrale de α le long de c est donnée par*

$$\int_c \alpha = \int_{[a,b]} c^*\alpha.$$

De manière plus explicite, si $\alpha = \sum\limits_{i=1}^n f_i dx_i$, on aura

$$\int_c \alpha = \int_{[a,b]} c^*\alpha = \int_{[a,b]} \sum_{i=1}^n c^*f_i \; dc_i = \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i(c(t))\frac{dc_i}{dt}(t)dt.$$

Exemple. On veut intégrer la 1-forme

$$\alpha = \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$$

le long du cercle unité. Soit $c(t) = (x, y) = (\cos t, \sin t)$ paramétrisation du cercle, alors

$$\begin{aligned} c^*\alpha &= \frac{-\sin t\ d\cos t + \cos t\ d\sin t}{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} \\ &= -\sin t(-\sin t)dt + \cos t \cos t dt \\ &= \left[(\sin t)^2 + (\cos t)^2\right]dt \\ &= dt \end{aligned}$$

ce qui donne donc

$$\int_c \alpha = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Exercice. Refaites l'exercice avec la paramétrisation du cercle $c\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ donnée par $c(t) = (x, y) = (\cos 2t, \sin 2t)$. Que remarquez-vous ?

Ceci n'est pas un hasard... En fait nous avons le résultat tout-à-fait général :

Théorème 1.2. *Si $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{U})$ est une 1-forme différentielle, $c\colon [a, b] \to \mathcal{U}$ une courbe lisse et $f\colon [c, d] \to [a, b]$ une fonction de reparamétrisation, alors on a*

$$\int_{c\circ f} \alpha = \begin{cases} \int_c \alpha & \textit{si } f \textit{ préserve l'orientation} \\ -\int_c \alpha & \textit{si } f \textit{ renverse l'orientation} \end{cases}$$

Dmonstration. On a par construction et naturalité du tiré en arrière que

$$\int_{c\circ f} \alpha = \int_{[c,d]} (c \circ f)^*\alpha = \int_{[c,d]} f^*(c^*\alpha).$$

En posant $c^*\alpha = g(t)dt$ et $t = f(s)$ on a

$$f^*(c^*\alpha) = f^*(g(t)dt) = f^*g(t)f^*dt = f^*g(t)df = f^*g(t)\frac{df}{ds}ds$$

donc on obtient

$$\int_{c\circ f} \alpha = \int_c^d g(f(s))f'(s)ds.$$

Par ailleurs on a

$$\int_c \alpha = \int_a^b g(t)dt.$$

On se souvient de la formule de substitution en calcul intégral (voir cours Analyse II) :

$$\int_{f(c)}^{f(d)} g(t)dt = \int_c^d g(f(s))f'(s)ds.$$

Selon que $f' > 0$ ou que $f' < 0$, on a bien

$$\int_{c\circ f} \alpha = \pm \int_c \alpha.$$

□

Dans le cas particulier où la 1-forme différentielle est *exacte* on a le résultat suivant :

THÉORÈME 1.3. *Soit $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{U})$ exacte ($\alpha = dg$) et $c\colon [a,b] \to \mathcal{U}$ une courbe lisse. Alors*

$$\int_c \alpha = g(c(b)) - g(c(a)).$$

DMONSTRATION. On a d'une part $c^*\alpha = c^*dg = dc^*g$ car d commute avec c^*. Si on pose $h(t) = c^*g(t) = g(c(t))$ on a $c^*\alpha = dh$ et donc

$$\int_c \alpha = \int_{[a,b]} c^*\alpha = \int_{[a,b]} dh = h(b) - h(a)$$

par le Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, ce qui est bien le résultat annoncé. □

Ceci traduit le fait que l'intégrale d'une 1-forme exacte le long d'une courbe lisse ne dépend que des extrémités de celle-ci. Notons en particulier que lorsque l'on intègre α exacte le long d'une courbe *fermée* le théorème précédent nous dit que

$$\int_c \alpha = 0.$$

En fait, on a

THÉORÈME 1.4. *Les énoncés suivants pour $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{U})$ sont équivalents :*

(1) *α est exacte.*

(2) *$\int_c \alpha = 0$ pour toute courbe fermée lisse c.*

(3) *$\int_c \alpha$ ne dépend que des extrémités de la courbe lisse $c\colon [a,b] \to \mathcal{U}$.*

DMONSTRATION. On montre le cycle d'implications (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).
(1) $\Rightarrow$ (2) : c'est le théorème précédent.
(2) $\Rightarrow$ (3) : Soient c_1 et c_2 deux courbes lisses ayant mêmes extrémités et considérons alors la courbe $c_1 \cdot (-c_2)$ obtenue en composant deux chemins. Il s'agit alors d'une courbe fermée et alors par le théorème précédent et la reparamétrisation de courbes on a

$$0 = \int\limits_{c_1 \cdot (-c_2)} \alpha = \int\limits_{c_1} \alpha + \int\limits_{-c_2} \alpha = \int\limits_{c_1} \alpha - \int\limits_{c_2} \alpha$$

et donc on a bien

$$\int\limits_{c_2} \alpha = \int\limits_{c_1} \alpha$$

comme voulu.
(3) $\Rightarrow$ (1) (la partie la plus difficile) Fixons $x_0 \in \mathcal{U}$ et pour chaque $x \in \mathcal{U}$ choisissons une courbe lisse c_x reliant x_0 à x. On définit alors

$$g(x) - \int\limits_{c_x} \alpha.$$

Par l'hypothèse faite en (3) g est bien définie et nous allons établir que $\alpha = dg$. Plus précisément si on a $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i dx_i$ on montre que

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = f_i \ (1 \leq i \leq n).$$

Soit ℓ segment de droite entre x et $x + h\vec{e}_i$ et $\tilde{c}$ la composition de c_x suivie de ℓ. Par définition et des propriétés de l'intégration on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h\vec{e}_i)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big[\int\limits_{c_x+h\vec{e}_i} \alpha - \int\limits_{c_x} \alpha\Big] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big[\int\limits_{\tilde{c}} \alpha - \int\limits_{c_x} \alpha\Big] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big[\int\limits_{c_x} \alpha + \int\limits_{\ell} \alpha - \int\limits_{c_x} \alpha\Big] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int\limits_{\ell} \alpha
\end{aligned}$$

Cette dernière expression peut être écrite comme

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int\limits_{\ell} \alpha = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int\limits_{[1,2]} \ell^*\alpha$$

où $\ell(t) = x + (t-1)h\vec{e}_i$ est définie sur $[1,2]$. Notons également que pour $1 \le j \le n$ les composantes $\ell_j(t)$ de $\ell(t)$ sont données par

$$\ell_j(t) = x_j + \delta_{ij}(t-1)h$$

si bien que l'on a $\ell_j'(t) = \delta_{ij}h$. On a ainsi

$$\ell^*\alpha = \sum_{j=1}^{n} f_j(x+(t-1)h\vec{e}_i)d\ell_j = \sum_{j=1}^{n} f_j(x+(t-1)h\vec{e}_i)\delta_{ij}h dt = hf_i(x+(t-1)h\vec{e}_i)dt.$$

On peut alors pousuivre notre calcul

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_1^2 hf_i(x+(t-1)h\vec{e_i})dt \\
&= \lim_{h\to 0}\int_0^1 f_i(x+sh\vec{e_i})ds \\
&= \int_0^1 \lim_{h\to 0} f_i(x+sh\vec{e_i})ds \\
&= \int_0^1 f_i(x)ds \\
&= f_i(x)
\end{aligned}$$

ce qui nous permet bien de conclure que $\alpha = dg$.

□

L'utilité de ce qui précède est au moins double. D'une part nous avons une obstruction simple à calculer à ce qu'une 1-forme différentielle α soit exacte (aorès avoir bien sûr vérifié que $d\alpha = 0$) : s'il existe une courbe fermée et lisse c telle que $\int_c \alpha \neq 0$ alors α ne peut être exacte. D'autre part si $\mathcal{U}$ est une région où toute 1-forme différentielle fermée α est exacte alors on sait directement que $\int_c \alpha = 0$ quelque soit la courbe lisse fermée c, sans calcul explicite et potentiellement compliqué.

Application. (indice de rotation) Considérons la 1-forme différentielle

$$\alpha = \frac{ydx + xdy}{x^2+y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}).$$

Il n'est pas difficile de montrer (le faire !) que l'on a $\alpha = \xi d\eta - \eta d\xi$ pour

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{et} \qquad \eta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Si $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ est une courbe lisse, prenons θ_0 tel que $\cos\theta_0 = \xi(c(0))$ et $\sin\theta_0 = \eta(c(0))$. On définit alors

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{[0,t]} c^*\alpha.$$

Si on consid ere la courbe $c(t)/||c(t)||$ (que nous noterons $c(t)$ pour par soucis de simplicité) celle-ci se déplace sur le cercle unité. En posant $f(t)$ et $g(t)$ comme étant les composantes en x et en y respectivement de cette courbe, on a $f(t) = \xi(c(t)) = c^*\xi$, $g(t) = \eta(c(t)) = c^*\eta$ et $f(t)^2 + g(t)^2 = 1$.
Montrez que $\theta(t)$ est lisse et satisfait

$$\cos\theta(t) = \xi(c(t)) \quad \text{et} \quad \sin\theta(t) = \eta(c(t)).$$

Ceci donne donc que $\theta(t)$ est un choix lisse d'angle le long de la courbe $c(t)$. La différence $\theta(1) - \theta(0)$ mesure donc l'*angle total* parcouru entre $c(0)$ et $c(1)$.

COROLLAIRE 1.5. *Si $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\{(0,0)\}$ est une courbe fermée alors $\theta(1)-\theta(0) = 2\pi k$ pour un certain entier $k \in \mathbb{Z}$.*

DMONSTRATION. On a en effet

$$(\cos\theta(0), \sin\theta(0)) = (\xi(c(0)), \eta(c(0))) = (\xi(c(1)), \eta(c(1)))$$

ce qui implique bien le résultat. $\square$

On appelle l'entier $k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_c \alpha$ l'*indice de rotation* de la courbe fermée c autour de l'origine $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Comme l'indique son nom, l'intuition que l'on en a est que cet indice de rotation mesure le nombre de tours *algébrique* faits lorsque l'on parcourt la courbe fermée c de son point initial à son point terminal.

2. Intégration des k-formes différentielles sur les k-chaînes

Nous généralisons facilement ce qui a été fait pour les 1-formes différentielles intégrées le long d'une courbe à la situation suivante : maintenant $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ est une k-forme différentielle qui sera intégrée le long d'un *k-cube singulier* $c\colon R \to \mathbb{R}^n$ que l'on requiert lisse, où $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k] = \{t \in \mathbb{R}^k \mid a_i \leq t_i \leq b_i \ (1 \leq i \leq k)\}$.
Le tiré en arrière de $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ est de la forme

$$c^*\omega = g(t)\ dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_k$$

et on définit

$$\int\limits_c \omega = \int\limits_R c^*\omega = \int\limits_{a_k}^{b_k} \cdots \int\limits_{a_2}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{b_1} g(t) dt_1 dt_2 \cdots dt_k$$

où cette dernière intégrale est l'intégrale usuelle rencontrée en calcul/analyse dans un espace euclidien

Remarque. Ceci vaut aussi pour le cas $k = 0$ où l'on a $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ et $c\colon R \to \mathbb{R}^n$ est donnée par $x = c(0)$. On a alors

$$\int_c f = f(x)$$

pour $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$.

Si on a $p\colon [a'_1, b'_1] \times \cdots \times [a'_k, b'_k] \to [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$ un difféomorphisme, on appelle $c \circ p$ une reparamétrisation du cube singulier c. On a alors

Théorème 2.1. *On a*

$$\int_{c \circ p} \omega = \begin{cases} \int_c \omega & \text{si } p \text{ préserve l'orientation} \\ -\int_c \omega & \text{si } p \text{ renverse l'orientation} \end{cases}$$

Dmonstration. Dans l'énoncé le fait de préserver (resp. renverser) l'orientation est défini par la condition $\det(dp)_s > 0$ (resp. $\det(dp)_s < 0$) pour tout s dans la région $R' = [a'_1, b'_2] \times \cdots \times [a'_k, b'_k]$.
La preuve est très similaire au cas $k = 1$ traité plus tôt et utilise essentiellement deux ingrédients :
(1) la naturalité $(c \circ p)^*\omega = p^*(c^*\omega)$;
(2) la formule de changement de variable en calcul

$$\int_{R'} g(p(s)) \big| \det(dp)_s \big| ds_1 ds_2 \cdots ds_k = \int_R g(t) dt_1 dt_2 \cdots dt_k.$$

Les détails sont laissés en exercice. □

On peut facilement montrer (voir TP) que l'on peut toujours reparamétrer une région $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$ par le k-cube unité $[0, 1] \times \cdots \times [0, 1]$. On a donc que $\int_c \omega$ peut toujours se calculer à partir d'une intégrale le long du k-cube unité.

Remarque importante. Dans le cas où $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^k)$, disons par exemple pour $k = 2$ et $\omega = f(t_1, t_2)\, dt_1 \wedge dt_2$ pour fixer les idées, comment réconcilier les faits suivants qui apparaissent contradictoires :

(1) $f(t_1,t_2)\ dt_2 \wedge dt_1 = -f(t_1,t_2)\ dt_1 \wedge dt_2$;
(2) la formule classique d'intégration

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(t_1,t_2)dt_1dt_2 = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(t_1,t_2)dt_2dt_1.$$

En fait, il n'y a pas de contradiction : dans l'équation apparaissant en (2) le membre de *gauche* représente $\int_c \omega$ pour $c\colon [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\to\mathbb{R}^2$ alors que le membre de *droite* calcule plutôt $\int_{c\circ p} -\omega$ où l'on a $p\colon [a_2,b_2]\times[a_1,b_1]\to[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ donnée par $p(s_1,s_2)=(s_2,s_1)$. Puisque p renverse l'orientation, on a bien

$$\int_{c\circ p} -\omega = -\int_c -\omega = \int_c \omega$$

selon notre théorie de l'intégration des formes différentielles, ce qui est exactement l'équation trouvée en (2).

On peut à partir de ce qui précède étendre la théorie aux *k-chaînes singulières* :

$$c = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_l c_l,$$

où $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l\in\mathbb{R}$ et $c_1,c_2,\ldots,c_l$ sont des k-cubes singuliers, en posant tout simplement

$$\int_c \omega = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \int_{c_i} \omega.$$

Nous avons maintenant développé le niveau de généralité pour l'intégration des formes différentielles qui sera nécessaire pour enfin revenir à l'énoncé principal de ce cours, le *Théorème de Stokes*. Il ne nous manque qu'une dernière notion : le *bord* d'une k-chaîne singulière. L'idée géométrique d'exprimer le bord de $[0,1]\times[0,1]\times\cdots\times[0,1]$ comme

$$\{0,1\}\times[0,1]\times\cdots\times[0,1]\ \cup\ [0,1]\times\{0,1\}\times\cdots\times[0,1]\ \cup\ [0,1]\times[0,1]\times\cdots\times\{0,1\}$$

n'est pas suffisante pour nos fins, car les orientations auront leur importance.

Formellement le bord d'une k-chaîne c sera une $(k-1)$-chaîne ∂c construite de la façon suivante :
(1) Sur les k-cubes.

Lorsque $k = 1$ le bord d'un 1-cube $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ est

$$\partial c = \{c(1)\} - \{c(0)\}.$$

Lorsque $k = 2$, le bord d'un 2-cube $c\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ est

$$\partial c = c_1 + c_2 - c_3 - c_4,$$

où $c_1 = [0,1] \times \{0\}$, $c_2 = \{1\} \times [0,1]$, $c_3 = [0,1] \times \{1\}$ et $c_4 = \{0\} \times [0,1]$.
Pour k quelconque, un k-cube $c\colon [0,1]^k \to \mathbb{R}^n$ possède $2k$ faces de dimension $k-1$ données pour chaque $1 \leq i \leq k$ par

$$\begin{aligned} c_{i,0}(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}) &= c(t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_k) \\ c_{i,1}(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}) &= c(t_1, \ldots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \ldots, t_k) \end{aligned}$$

et on définit alors

$$\partial c = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \big(c_{i,0} - c_{i,1}\big) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\rho=0,1} (-1)^{i+\rho}\ c_{i,\rho}.$$

(2) Sur les k-chaînes.
On étend la construction précédente par linéarité : si $c = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i c_i$, alors on pose

$$\partial c = \sum_{i=1} \alpha_i \partial c_i.$$

Théorème 10. *Pour toute k-chaîne singulière c de $\mathbb{R}^n$ on a $\partial(\partial c) = 0$.*

Dmonstration. La preuve est assez fastidieuse et ne nous en apprend pas beaucoup pour la suite du cours, puisque c'est un argument de topologe combinatoire, un sujet tout de même périférique par rapport aux objets étudiés dans ce cours. Nous référons le lecteur, la lectrice à la référence [**Sja**] (page 61). Pour développer une certaine intuition on pourra analyser en exercice ce qui se passe dans le cas $k = 3$. $\square$

Définition 2.2. *Un k-cube $c(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ est dit dégénéré s'il est indépendant d'au moins une des variables t_i $(1 \leq i \leq k)$. De même une k-chaîne est dégénérée si tous les k-cubes contribuant non-trivialement à celle-ci le sont.*

Lemme 2.3. *Si $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ est c est une k-chaîne dégénérée, alors on a*

$$\int_c \omega = 0.$$

DMONSTRATION. Sans perte généralité, on suppose que c est un k-cube dégénéré. Supposons, par exemple, que l'on a $c(t_1, \dots, t_i, \dots, t_k) = c(t_1, \dots, 0, \dots, t_k)$. Si l'on définit $f\colon [0,1]^k \to [0,1]^{k-1}$ par $f(t_1, \dots, t_i, \dots, t_k) = (t_1, \dots, \widehat{t_i}, \dots, t_k)$, ainsi que $g\colon [0,1]^{k-1} \to \mathbb{R}$ par $g(s_1, \dots, s_{k-1}) = c(s_1, \dots, s_{i-1}, 0, s_{i+1}, \dots, s_{k-1})$, on a alors

$$c(t_1, \dots, t_i, \dots, t_k) = g(f(t_1, \dots, t_i, \dots, t_k)).$$

Mais alors on a que $g^*\omega$ est une k-forme différentielle sur $[0,1]^{k-1}$ si bien que c'est forcément la forme nulle et il s'en suit que

$$\int\limits_c \omega = \int\limits_{[0,1]^k} c^*\omega = \int\limits_{[0,1]^k} (g \circ f)^*\omega = \int\limits_{[0,1]^k} (f^* \circ g^*)(\omega) = 0.$$

□

Le lemme précédent implique que les chaînes dégénérées ne comptent pas dans la théorie de l'intégration des formes différentielles que nous sommes en train de développer.

DÉFINITION 2.4. *On dit qu'une k-chaîne c est un cycle si ∂c est une $(k-1)$-chaîne dégénérée.*

DÉFINITION 2.5. *On dit qu'une k-chaîne c est un bord si l'on a $c = \partial b + c'$ pour une certaine $(k+1)$-chaîne b et une k-chaîne dégénérée c'.*

LEMME 2.6. *Le bord d'une k-chaîne dégénérée est une $(k-1)$-chaîne dégénérée.*

DMONSTRATION. Supposons que c est dégénérée en ne dépendant pas de la variable t_i. Nous avons alors que

$$\partial c = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j (c_{j,0} - c_{j,1}) = (-1)^i (\underbrace{c_{i,0} - c_{i,1}}_{0}) + \sum_{j \neq i} (-1)^j (\underbrace{c_{j,0} - c_{j,1}}_{\text{dégénéré}}),$$

où le terme nul ci-dessus l'est car car c est indépendante de t_i et par définition de $c_{i,0}$ et $c_{i,1}$, alors que le terme indiqué comme dégénéré l'est parce que, pour $j \neq i$, $c_{j,0}$ et $c_{j,1}$ sont également dégénérés puisqu'ils ne dépendent pas de t_i. □

Nous avons alors le propriété importante suivante :

PROPOSITION 2.7. *Tout k-bord est un k-cycle.*

DMONSTRATION. Soit $c = \partial b + c'$ un k-bord, où c' est dégénérée. On a alors

$$\partial c = \partial(\partial b + c') = \underbrace{\partial(\partial b)}_{0} + \partial c' = \partial c',$$

et ce dernier terme est bien dégénéré en vertu du lemme précédent. Ceci montre bien que c est un k-cycle. □

Remarque. Attention ! S'il est toujours vrai d'un k-bord est un k-cycle, il n'est pas forcément vrai que la réciproque tienne... il est des k-cycles qui ne sont pas k-bords. On peut intuitivement donner des exemples de candidats : le cercle unité dans $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, les cercles $S^1 \times \{*\}$ ou $\{*\} \times S^1$ dans le tore $S^1 \times S^1$, etc. Même s'il semble clair que ces k-cycles ne peuvent être des k-bords, la démonstration rigoureuse de ceci requiert des outils que nous n'avons pas encore à notre disposition.

3. Enfin ! Le théorème de Stokes

Voici une jolie reformulation du TFCDI :

$$\int_c dg = g(c(1)) - g(c(0)) = \int_{\{c(1)\}} g - \int_{\{c(0)\}} g = \int_{\partial c} g.$$

C'est cette formule que nous allons généraliser grâce aux outils développés au fil du cours.

THÉORÈME 11. **(Théorème de Stokes)** *Soit $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathcal{U})$ une $(k-1)$-forme différentielle et c une k-chaîne dans $\mathcal{U}$. Alors on a*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

DMONSTRATION. Par linéarit e de l'intégration, et du bord d'une k-chaîne, il suffit de montrer le résultat dans le cas où c est un k-cube singulier. On a alors

$$\int_c d\omega = \int_{[0,1]^k} c^*(d\omega) = \int_{[0,1]^k} d(c^*\omega).$$

Comme on a $c^*\omega \in \Omega^{k-1}([0,1]^k)$ elle peut être écrite comme

$$c^*\omega = \sum_{i=1}^{k} g_i \; dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt_i} \wedge \cdots \wedge dt_k$$

pour certaines fonctions lisses $g_1, \ldots, g_k$ définies sur $[0,1]^k$. On a alors

$$\begin{aligned}\int\limits_c d\omega &= \sum_{i=1}^k \int\limits_{[0,1]^k} d(g_i \; dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt_i} \wedge \cdots \wedge dt_k \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \int\limits_{[0,1]^k} \frac{\partial g_i}{\partial t_i} \; dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_k.\end{aligned}$$

Mais selon l'intégrale usuelle en calcul, on a

$$\int\limits_{[0,1]^k} \frac{\partial g_i}{\partial t_i} \; dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_k = \int\limits_{[0,1]^k} \frac{\partial g_i}{\partial t_i} \; dt_1 dt_2 \cdots dt_k.$$

Cette derni ere expression peut être exprimée de la façon suivante en intégrant la $i^{\text{ème}}$ variable et en invoquant le TFCDI :

$$\begin{aligned}\int\limits_{[0,1]^k} \frac{\partial g_i}{\partial t_i} \; dt_1 dt_2 \cdots dt_k &= \int\limits_{[0,1]^{k-1}} \big(g_i(t_1, \ldots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \ldots, t_k) - g_i(t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_k)\big) dt_1 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_k \\ &= \int\limits_{[0,1]^{k-1}} c_{i,1}^* \omega - c_{i,0}^* \omega\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\int\limits_c d\omega &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \int\limits_{[0,1]^{k-1}} c_{i,1}^* \omega - c_{i,1}^* \omega \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{\rho=0,1} (-1)^{i+\rho} \int\limits_{[0,1]^{k-1}} c_{i,\rho}^* \omega \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{\rho=0,1} (-1)^{i+\rho} \int\limits_{c_{i,\rho}} \omega \\ &= \int\limits_{\sum_{i=1}^k \sum_{\rho=0,1} (-1)^{i+\rho} c_{i,\rho}} \omega \\ &= \int\limits_{\partial c} \omega\end{aligned}$$

tel que voulu. □

Pour élargir la discussion de ces idées et donner bri evement une idée de développements ultérieurs de la théorie, introduisons très brièvement la notion d'*homologie singuliêre* (version cubique) : étant donné X un ouvert [1] de $\mathbb{R}^n$, on définit

$$C_k(X) = Q_k(X)/D_k(X)$$

où $Q_k(X)$ est l'espace vectoriel des k-chaînes dans X et $D_k(X)$ le sous-espace des k-chaînes dégénérées. On a alors l'opérateur de bord

$$\partial = \partial_k \colon C_k(X) \to C_{k-1}(X)$$

satisfaisant $\partial^2 = 0$ et on peut considérer

$$Z_k(X) = \operatorname{Ker} \partial_k \qquad (k\text{-cycles})$$
$$B_k(X) = \operatorname{Im} \partial_{k+1} \qquad (k\text{-bords})$$

ce qui permet de définir le $k^{\text{ème}}$ *groupe d'homologie singulière de* X. On peut naturellement se demander s,il y a un lien entre ceci et la cohomologie de deRham introduite plus tôt ? Nous tentons ici de répondre à cette question.

Etant donné $\omega \in \Omega^k(X)$ on définit avec un léger abus de notations

$$\omega \colon C_k(X) \to \mathbb{R}$$

par

$$\omega(c) = \int_c \omega.$$

Par linéarité de l'intégrale, on a alors que $\omega \in C_k(X)^*$. En homologie singulière on veut cosidérer seulement les k-cycles alors qu'en cohomologie de deRham, on ne s'intéresse qu'aux k-formes différentielles fermées. Mais par Stokes on a

$$\omega(\partial c) = \int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega$$

donc c'est bien parti.

Proposition 3.1. *Pour $\omega \in \Omega^k(X)$ fermée et $c \in Z_k(X)$ la quantité*

$$\omega(c) = \int_c \omega$$

ne dépend que de la classe de cohomologie de ω et de la classe d'homologie de c.

1. En fait la théorie est plus généralement valable pour les espaces topologiques.

Dmonstration. Nous utilisons de manière essentielle le théorème de Stokes dans les deux arguments suivants. D'une part nous utilisons $\partial c = 0$ pour avoir

$$\int_c \omega + d\alpha = \int_c \omega + \int_c d\alpha = \int_c \omega + \int_{\partial c} \alpha = \int_c \omega.$$

Par ailleurs, nous utilisons $\partial a = 0$ pour avoir

$$\int_{c+\partial a} \omega = \int_c \omega + \int_{\partial a} \omega = \int_c \omega + \int_a d\omega = \int_c \omega$$

$\square$

Ceci noue permet alors de définir une application linéaire

$$\mathcal{D}\colon H^k_{dR}(X) \to H_k(X)^*$$

par la formule

$$\begin{aligned} \mathcal{D}([\omega])\colon H_k(X) &\to \mathbb{R} \\ [c] &\mapsto \int_c \omega \end{aligned}$$

Nous pouvons alors énoncer le lien merveilleux qui émerge entre entre l'homologie singulière d'un espace et la cohomologie de de Rham. La preuve du théorème suivant va toutefois bien au-delà du niveau de ce cours d'introduction.

Théorème 12. **(Théorème de de Rham)** *L'application $\mathcal{D}\colon H^k_{dR}(X) \to H_k(X)^*$ est un isomorphisme.*

4. Un cours éclair de calcul vectoriel intégral

Dans cette section, nous introduisons les notions classiques de calcul vectoriel nécessaires pour énoncer les *théorèmes intégraux* de Green, de Stokes et de Gauss-Ostrogradsky. Il est à noter que nous adopterons également les notations classiques pour ces objets, parfois différentes de celles utilisées précédemment, afin que le lecteur ou la lectrice puisse facilement lire les ouvrages plus anciens.

Contrairement à l'approche traditionnelle de ces résultats où chaque énoncé requiert sa preuve, les preuves données dans ce cours proviennent *toutes* du Théorème de Stokes général

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Nous ne donnerons pas les preuves de ces résultats classiques dans cette section, elles viendront par la suite, pour se concentrer sur les simples énoncés.

Soit $\mathbf{F}$ une champ de vecteur lisse et $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ un chemin lisse sur $\mathbb{R}^3$. On appelle *intégrale curviligne de* $\mathbf{F}$ *le long de* γ la quantité

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

C'est-à-dire que l'on intègre le produit scalaire de $\mathbf{F}$ et γ' le long de l'intervalle $[a,b]$. En fait, nous avons déjà rencontré cette intégrale... En se souvenant que sous la dualité le champ $\mathbf{F}$ correspond à la 1-forme différentielle $\alpha_{\mathbf{F}}$, une fois écrite en coordonnées, l'expression à droite dans l'intégrale curviligne permet de voir que

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_\gamma \alpha_{\mathbf{F}}$$

comme on pourra aisément le vérifier.

A priori on s'attend à ce que l'intégrale curviligne dépende du comportement de $\mathbf{F}$ le long de tout le chemin γ. Mais ceci n'est pas le cas lorsque le champ $\mathbf{F}$ est un champ gradient comme le montre le résultat suivant :

Théorème 4.1. *Lorsque le champ de vecteurs* $\mathbf{F}$ *est un champ gradient, c'est-à-dire que* $\mathbf{F} = \nabla f$ *pour une certaine fonction lisse* $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$*, et que* $\gamma\colon [a,b] \to R$ *est une courbe lisse, alors*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_\gamma \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

autrement dit l'intégrale curviligne d'un champ gradient ne dépend que des extrémités du chemin γ*.*

Dmonstration. En appliquant la règle de dérivation en chaîne (fournissez les détails) à la fonction complosée $\varphi(t) = f(\gamma(t))$:

$$\varphi'(t) = (f \circ \gamma)'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Par le TFCDI on a alors

$$\int_a^b \varphi'(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

On en déduit que

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_\gamma \nabla f \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \int_a^b \varphi'(t)dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

□

En fait, on peut accomplir beaucoup plus comme le montre le résultat suivant :

THÉORÈME 4.2. *Etant donné* $\mathbf{F}$ *un champ de vecteurs lisse sur* $\mathbb{R}^3$ *les énoncés suivants sont équivalents :*

(1) Pour toute courbe lisse fermée γ *de* $\mathbb{R}^3$ *on a*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

(2) Si deux courbes lisses γ_1 *et* γ_2 *de* $\mathbb{R}^3$ *ont mêmes extrémités, alors*

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

(3) Le champ de vecteurs $\mathbf{F}$ *est champ gradient : il existe* $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *lisse telle que* $\mathbf{F} = \nabla f$.

(4) Le champ de vecteurs $\mathbf{F}$ *est irrotationnel :* $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$.

On peut immédiatement généraliser ce qui précède a cas de courbes qui sont seulement lisses *par morceaux* sur $[a, b]$, c'est-à-dire que l'on peut trouver une partition de $[a, b]$ en sous-intervalles $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{n-1}, a_n]$ où la courbe est lisse sur les intervalles ouverts correspondants. Les résultats montrés demeurent alors vrais comme on peut aisément s'en convaincre.

Soit maintenant Σ une surface régulière donnée par une paramétrisation

$$\chi = \chi(s, t) \colon \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3.$$

Il y a deux intégrales que l'on peut définir sur Σ que l'on cherchera à mettre en lien. D'une part si $f\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse on peut définir l'intégrale de f le long de Σ par

$$\int_{\Sigma} f dS = \int_{\mathcal{U}} f(\chi(s,t))||\partial_s\chi \times \partial_t\chi||dsdt.$$

D'autre part, si l'on suppose que $\mathbf{F}$ est un champ de vecteurs de $\mathbf{R^3}$. on appelle *intégrale de surface de* $\mathbf{F}$ *le long de* Σ la quantité

$$\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{U}} \mathbf{F} \cdot (\partial_s\chi \times \partial_t\chi)dsdt.$$

Pour établir un lien entre les deux notions, nous avons besoin de la notion de vecteur normal unitaire à la surface Σ. On se souvient que pour la paramétrisation $\chi(s,t)$ de la surface Σ permet de décrire le plan tangent à la surface en $\chi(s_0,t_0)$ comme étant engendré par $\partial_s\chi(s-0,t_0)$ et $\partial_t\chi(s_0,t_0)$. Il s'en suit que le champ de vecteurs $\partial_s\chi \times \partial_t\chi$ est orthogonal à Σ et on définit un *champ de vecteurs normal unitaire* pour Σ par

$$\mathbf{n} = \frac{\partial_s\chi \times \partial_t\chi}{||\partial_s\chi \times \partial_t\chi||}.$$

On peut alors donner l'expression suivante pour l'intégrale de surface d'un champ de vecteurs $\mathbf{F}$ le long de la surface Σ :

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{\mathcal{U}} \mathbf{F} \cdot (\partial_s\chi \times \partial_t\chi)dsdt \\
&= \int_{\mathcal{U}} \mathbf{F} \cdot \Big(\frac{\partial_s\chi \times \partial_t\chi}{||\partial_s\chi \times \partial_t\chi||}\Big)||\partial_s\chi \times \partial_t\chi||dsdt \\
&= \int_{\mathcal{U}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})||\partial_s\chi \times \partial_t\chi||dsdt \\
&= \int_{\Sigma} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})dS
\end{aligned}$$

Le premier résultat de calcul vectoriel intégral qu'nous énonçons concerne les champs de vecteurs dans une région bordée dans le plan $\mathbb{R}^2$.

THÉORÈME 13. **(Théorème de Green)** *Soit D une région de $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ dont le bord ∂D est une courbe simple*[2] *lisse par morceaux que l'on oriente dans le sens anti-horaire. Alors pour tout champ de vecteurs lisse $\mathbf{F}$ sur D on a*

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{D} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \; dS$$

où $\mathbf{k}$ est le champ de vecteurs unitaire normal à D dans $\mathbb{R}^3$.

Le second résultat classique concerne quant à lui les surfaces dans $\mathbb{R}^3$ ayant un bord.

THÉORÈME 14. **(Théorème de Stokes)** *Soir Σ une surface régulière donnée par une paramétrisation $\chi\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ dont le bord $\partial\Sigma$ est une courbe lisse donnée par $\chi_{|\partial U}\colon \partial\mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ et orientée par S. Alors pour tout champ de vecteurs lisse $\mathbf{F}$ sur Σ on a*

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Le troisième résultat classique concerne les régions Ω de $\mathbb{R}^3$ dont le bord $\partial\Omega$ est une surface régulière.

THÉORÈME 15. **(Théorème de Gauss-Ostrogradsky)** *Soit $\mathbf{F}$ une champ de vecteurs lisse défini sur une région Ω de $\mathbb{R}^3$ dont le bord $\partial\Omega$ est une surface régulière. Alors on a*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \; dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

5. Preuves modernes des résultats classiques

Pour obtenir toutes les preuves des résultats énoncés dans la section précédente, nous n'aurons qu'à procéder comme suit :

(1) Se souvenir du dictionnaire traduisant les objets classiques (champs de vecteurs, champs gradients, rotationnel, divergence, etc) dans le langage des formes différentielles ;

(2) Réinterpréter les intégrales classiques comme des intégrales de formes différentielles ;

(3) Utiliser le Théorème de Stokes général

$$\int_{c} d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

2. La courbe est simple si elle n'a pas d'auto-intersections.

DMONSTRATION. (Théorème 4.1)
La correspondance entre un champ de vecteurs $\mathbf{F}$ et la 1-forme différentielle $\alpha_{\mathbf{F}}$ a permis ci-dessus d'interpréter l'intégrale curviligne comme

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_\gamma \alpha_{\mathbf{F}}.$$

Encore sous la dualité nous avons vu que le gradient champ de vecteurs ∇f correspond à la 1-forme différentielle df. L'hypothèse voulant que $\mathbf{F} = \nabla f$ ainsi que le Théorème de Stokes généralisé permettent alors d'obtenir

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_\gamma \nabla f \cdot d\mathbf{s} = \int_\gamma df = \int_{\partial\gamma} f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

tel que voulu. □

DMONSTRATION. (Théorème 13)
Soit $\mathbf{F} = f\frac{\partial}{\partial x} + +g\frac{\partial}{\partial y}$ un champ de vecteurs lisse d'une région $D \subset \mathbb{R}^2$. On se souvient que le rotationnel de $\mathbf{F}$, vu comme un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, est donné par

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} == \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & 0 \end{vmatrix}$$

si bien que l'on a

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Par ailleurs sous dualité $\mathbf{F}$ correspond à $\alpha_{\mathbf{F}} = f dx + g dy$ et on se souvient alors que

$$d\alpha_{\mathbf{F}} = \Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big) dx \wedge dy.$$

On a alors à l'aide du Théorème de Stokes généralisé que

$$\int_D \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\ dS = \int_D \Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big) dx \wedge dy = \int_D d\alpha_{\mathbf{F}} = \int_{\partial D} \alpha_{\mathbf{F}} = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

tel que demandé pour conclure la preuve du Théorème de Green. □

Non seulement notre formalisme nous donne une preuve courte et simple du Théorème de Green, mais il permet en outre d'obtenir sa généralisation naturelle à $\mathbb{R}^n$: Si on considère la 1-forme différentielle

$$\alpha = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$$

on a alors

$$d\alpha = \sum_{1\leq i<j<\leq n} \Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big) dx_1 \wedge dx_j$$

et Stokes généralisé donne immédiatement

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \int\limits_B \Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big) dx_i dx_j = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial B} f_i dx_i,$$

qui est la généralisation à $\mathbb{R}^n$ du Théorème de Green.

Dmonstration. (Théorème 14)
Pour établir le Théorème de Stokes classique

$$\int\limits_\Sigma \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\limits_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

nous devons faire certains rappels également. Premièrement, étant donné $\omega \in \Lambda^2 T_p\mathbb{R}^3$ et $X_1, X_2 \in T_p\mathbb{R}^3$ il existe $V_\omega \in T_p\mathbb{R}^3$ tel que

$$\omega(X_1, X_2) = V_\omega \cdot (X_1 \times X_2).$$

Dans le cas précis où l'on a

$$\omega = f_1 d_y \wedge dz - f_2 dx \wedge dz + f_3 dx \wedge dy$$

l'observation ci-dessus donne tout simplement

$$V_\omega = f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + f_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

puisque l'on a

$$\begin{aligned}
\omega\Big(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big) &= f_1 = (f_1, f_2, f_3) \cdot \frac{\partial}{\partial x} = (f_1, f_2, f_3) \cdot \Big(\frac{\partial}{\partial y} \times \frac{\partial}{\partial z}\Big)\\
\omega\Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}\Big) &= f_2 = (f_1, f_2, f_3) \cdot \frac{\partial}{\partial y} = (f_1, f_2, f_3) \cdot \Big(\frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial z}\Big)\\
\omega\Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\Big) &= f_3 = (f_1, f_2, f_3) \cdot \frac{\partial}{\partial z} = (f_1, f_2, f_3) \cdot \Big(\frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial y}\Big).
\end{aligned}$$

Deuxièmement, ce qui précède permet d'interpréter l'intégrale de surface de $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$

$$\int\limits_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dsdt$$

comme

$$\int\limits_S *\alpha_{\mathbf{F}}.$$

En effet ceci découle de l'observation précédente et du fait que pour $\alpha_{\mathbf{F}} = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ on a $*\alpha_{\mathbf{F}} = f_1 dy \wedge dz - f_2 dx \wedge dz + f_3 dx \wedge dy$.
Finalement, nous devons nous souvenir que pour le champ de vecteur $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ on a l'identification $\alpha_{\operatorname{rot}\mathbf{F}} = *d\alpha_{\mathbf{F}}$ si bien que l'on a $*\alpha_{\operatorname{rot}\mathbf{F}} = d\alpha_{\mathbf{F}}$. On peut alors conclure la preuve du Théorème de Stokes classique :

$$\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_S *\alpha_{\operatorname{rot}\mathbf{F}} = \int_S d\alpha_{\mathbf{F}} = \int_{\partial S} \alpha_{\mathbf{F}} = \int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}.$$

□

Dmonstration. (Théorème 15)
Dans le cas du Théorème de Gauss-Ostrogradsky, nous pouvons même démontrer la généralisation à $\mathbb{R}^n$:

$$\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F} dx_1 \cdots dx_n = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot *dx,$$

où nous devrons, dans un premier temps, expliquer la notation donnant un sens à cette formule. Dans l'énoncé ci-dessus on définit

$$dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$$

ainsi que

$$*dx = (*dx_1, *dx_2, \dots, *dx_n).$$

Ceci permet d'interpréter la 1-forme différentielle associée à $\mathbf{F}$ sous la dualité $\mathbf{F} \leftrightarrow \alpha_{\mathbf{F}}$ comme étant donnée par

$$\alpha_{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\cdot dx.$$

On a alors la linéarité de l'opérateur de Hodge que

$$*\alpha_{\mathbf{F}} = *(\mathbf{F}\cdot dx) = \mathbf{F}\cdot *dx$$

et donc que

$$d(*\alpha_{\mathbf{F}}) = d(\mathbf{F}\cdot *dx) = \operatorname{div}\mathbf{F}\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

On peut alors conclure la démonstration du Théorème de Gauss-Ostrogradsky :

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F}\ dx_1 \dots dx_n &= \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} F\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \int\limits_{\Omega} d(*\alpha_{\mathbf{F}}) \\
&= \int\limits_{\partial\Omega} *\alpha_{\mathbf{F}} \\
&= \int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot *dx.
\end{aligned}$$

$\square$

Bibliographie

[Bac] D. Bachman, *A geometric approach to differential forms*, Birkhaüser, New York (2012)

[Car] H. Cartan, *Formes différentielles*, Hermann, Paris (1967)

[MT] J. Marsden, A. Tromba, *Vector calculus*, Freeman, New York (1988)

[Sja] R. Sjamaar, *Manifolds and differential forms*, notes de cours (2014)
(disponibles à http ://www.math.cornell.edu/∼sjamaar/manifolds/manifold.pdf)